O número π: curiosidades e história

Joaquim Eurico Nogueira

> Datam de há muitos séculos as primeiras referências a π. Este artigo mostra-nos a história e evolução deste número, desde o Antigo Testamento até aos nosso dias, referindo as diversas abordagens e definições que conduziram a aproximações cada vez melhores.

O número π, que todo o estudante do ensino secundário tem obrigação de conhecer, é uma das mais importantes constantes do universo matemático, estando intimamente relacionado com a circunferência (quem não conhece a expressão $2\pi R$ para o perímetro e πR^2 para a área da circunferência, onde R é o seu raio?) e, por consequência, com as funções trigonométricas, suas inversas e o cálculo de integrais.

As suas principais propriedades são a irracionalidade (provada por J. H. Lambert em 1761 e A. M. Legendre em 1794) e a transcendência (provada pelo matemático alemão F. Lindemann em 1882). A definição exacta deste número que, com quatro casas decimais se escreve 3,1416, é a seguinte:

$$\pi = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Esta não é a única possível maneira, de representar π com exactidão. Eis outras formas a partir das quais π pode ser definido:

1) $$\frac{1}{\pi} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \ldots\right)$$

(da autoria de Viéte),

2) $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.2.4.4.\ldots.(2n).(2n)}{1.3.3.5.\ldots.(2n-1).(2n+1)}$$

(da autoria de Wallis),

3) $$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(da autoria de Gregory, 1671),

4) $$\pi = 16\cot g\frac{1}{5} - 4\cot g\frac{1}{239}$$

(da autoria de John Machin, 1706),

5) $$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right),$$

6) $$\pi = 48\,\mathrm{arctg}\frac{1}{8} + 32\,\mathrm{arctg}\frac{1}{57} \pm 20\,\mathrm{arctg}\frac{1}{239},$$

7) $$\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

(estas três fórmulas são da autoria de Gauss),

8) $$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right),$$

9) $$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ldots}}}}$$

(permite o cálculo de π sob a forma de fracção contínua),

10) $$\frac{1}{\pi} = \left\{\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4}\,\frac{(1103+26390n)}{396^{4n}}\right\}$$

(esta fórmula descoberta pelo matemático indiano Ramanujan em 1914, foi usada pelos irmãos Chudnosky, em 1994, para calcular quatro biliões de algarismos de π),

11) $$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

(esta última, por sua vez, permite calcular cada algarismo de π, individualmente, o que é algo de notável e que, até há pouco tempo, se acreditava ser impossível. Os matemáticos estavam firmemente convencidos de que, para calcular, por exemplo, o milésimo-primeiro algarismo de π, era preciso ter calculado previamente os mil algarismos anteriores).

O número π, cuja notação foi adoptada em 1737 por Euler (1707/1783), era já usado em 1706 pelo inglês W. Jones. Note-se que, no tempo de Barrow (1630/1677) que foi professor de Newton na Universidade de Cambridge, se utilizava a letra π, mas atribuindo-se-lhe um sentido diferente do actual, pois naquela época esta letra designava a fronteira do círculo (a circunferência) e não a constante numérica.

Datam de há muitos séculos as primeiras referências a π. Já no Antigo Testamento, ao serem dadas as dimensões de um vaso circular que tem *"10 côvados de um bordo ao outro, 5 côvados de altura e apertado à volta por um cordão de 30 côvados"* (onde 1 côvado=3palmos=66cm) se está a definir implicitamente π como sendo o valor 3, o que, diga-se de passagem, é uma aproximação péssima. Era, no entanto, esta a aproximação então usada no Egipto, na China e na Mesopotâmia. Num texto cuneiforme babilónico datado de 2000 a.C. e num papiro de Tebas, um pouco mais recente, encontramos π já determinado com uma casa decimal correcta.

Arquimedes (287/212 a.C) conseguiu melhorar um pouco a situação. Aproximando a circunferência por polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados, descobre que o valor de π se encontra entre $3\frac{1}{7}$ e $3\frac{10}{71}$, ou seja que $3{,}14085 < \pi < 3{,}142857$, obtendo uma aproximação com duas casas decimais correctas.

Por volta do ano 400 d.C. o livro indiano "Paulisha Siddhânta" usa o valor $\frac{3177}{1250}$ para π e, quase um século depois, em 499 d.C., encontramos, num tratado indiano (escrito em verso) sobre matemática e astronomia denominado "āryabhatiya" (cujo autor era aryabhata), instruções para a determinação do valor do número π com bastante rigor: *"Adicione-se 4 a 100, multiplique-se o resultado por 8 e adicione-se 62.000. O resultado é aproximadamente o comprimento da circunferência de diâmetro 20.000."* Deste enunciado, que mais parece uma receita culinária, obtem-se o valor aproximado 3,1416 que é uma boa aproximação com 3 casas decimais correctas e a quarta correctamente aproximada por excesso.

Enquanto isso, os chineses obtinham 6 casas decimais exactas, precisão que só seria atingida na Europa sete séculos mais tarde. Em 1596, Ludolph Van Ceulen (1539/1610), no seu ensaio "Van der Circkel", forneceu 20 casas decimais exactas e, numa sua obra publicada postumamente em 1615, π surgiu com 35 casas decimais exactas[1], que aumentaram para 140 em finais do século XVIII (Vega, 1796). Em 1844, um Vienense fornece 205 casas decimais mas, verdade seja dita, todas as operações foram confiadas a um calculador prodígio de 16 anos que, em 2 meses, fez o trabalho que outros levariam anos a realizar.

O recorde do cálculo manual pertence ao inglês William Shanks que determinou 707 casas decimais. Infelizmente, o cálculo está errado a partir da 528ª casa, o que não é de espantar se pensarmos que é preciso calcular mais de 1.000 termos de uma série convergente, cada qual com 710 algarismos e, ainda para mais, cada termo exige duas multiplicações muito extensas e duas divisões feitas sem erro. O engano só em 1946 foi detectado pelo inglês D. F. Ferguson que conjuntamente com o americano J. W. Wrench atingiu as 808 casas decimais para o número π.

Foi a partir de 1949 que começaram a ser usados os computadores para o cálculo do π, tendo a utilização da fórmula de Machin proporcionado a computação de 2037 casas decimais correctas. Mais recentemente novos algoritmos computacionais proporcionaram a descoberta de um número de casas decimais cada vez maior: um dos mais recentes, da autoria de Brent e Salamin (1975)[2] foi usado em 1983 pelos japoneses Y. Kanada, Y. Tamura, S. Yoshino e Y. Ushiro que o implementaram num computador tendo obtido 16 milhões de algarismos. Verificaram depois as contas por meio da relação de Gauss, tendo essa verificação mostrado que as primeiras 10.013.395 casas estavam correctas. Usando um algoritmo distinto Gosper calculou, em 1985, 17 milhões de algarismos e, em Janeiro de 1986, Bailey atingiu a marca dos 29 milhões usando um Cray-2. Kanada conseguiu calcular 33.554.000 algarismos em Setembro de 1986, 2^{27} algarismos em Janeiro de 1987 e 201.326.551 em Janeiro de 1988. Anos depois, Bailey e Gregory Chudnovsky, da Columbia University, calcularam mais de um bilião de casas decimais de π sendo, em 1995, ultrapassada a fasquia dos 3 biliões, por investigadores japoneses. Pouco tempo depois (em Setembro de 1995) o professor japonês Yasumasa Kanada, após ter posto o seu supercomputador Hitachi a trabalhar durante cerca de 250 horas, obteve 6.442.450.938 casas decimais exactas deste número. Conseguiu bater este recorde em Junho de 1997 obtendo então 51.539.600.000 casas decimais exactas!...

Também recentemente, há a assinalar que o francês Fabrice Bellard, de 25 anos, calculando o valor de π, mas desta vez em numeração binária, atingiu sucessivamente as fasquias de 400 biliões (Outubro de 1996) e 1.000 biliões (Setembro de 1997). Este último recorde foi obtido após 25 dias de cálculo intensivo em computadores ligados em rede através da INTERNET, tendo sido usada uma fórmula desenvolvida em 1995 por matemáticos da Universidade Simon Fraser (Canadá), mas aperfeiçoada por Bellard.

Todos estes cálculos recordam-nos um problema que desde há muito tempo se arrasta para o número π: o problema da normalidade. Um número x diz-se normal na base b se, na sua representação nessa base, todos os algarismos ocorrem um mesmo número de vezes, ou seja, se

$\lim_{n\to\infty} \frac{N(s,n)}{n} = \frac{1}{b}$ onde N(s,n) é o número de vezes que o algarismo *s* ocorre nas *n* primeiras casas decimais de x, e *b* é o número da base (a definição é de Émile Borel, e data de 1907).

Na base 10, uma dízima infinita será, portanto, normal se nela todos os algarismos de 0 a 9 aparecerem na proporção de 1/10, registando-se o facto de D. Champernowne da Universidade de Cambridge ter provado que o número 0,12345678910111213141516... é normal em base 10. No entanto, ainda não foi possível obter um exemplo de um número que seja normal em todas as bases e isto apesar de haver tantos números normais como reais, facto que Borel demonstrou.

Pensa-se que talvez π seja normal... Mas até hoje ainda nenhum matemático conseguiu provar tal facto, e isto apesar de as frequências dos 10 algarismos entre os primeiros 10 milhões de casas decimais (respectivamente 999440, 999333, 1000306, 999964, 1001093, 1000466, 999337, 1000207, 999814 e 1000040) concordarem com os valores esperados teoricamente. Como foi salientado, os cálculos já realizados não são uma prova conclusiva da normalidade de π em base 10. Quem nos diz que subitamente não vão surgir nas casas decimais deste número uma quantidade infinita de 0's e 1's que altere completamente as frequências esperadas? Talvez π seja da forma π=3,1415926... 01000010000100 100100101100110 .... Esta ideia foi aproveitada pelo astrónomo americano Carl Sagan na sua obra "*Contacto*". Nesse excepcional livro[3] a sua heroína Elianor Arroway encontra alienígenas que lhe comunicam que na representação de π em base 11 subitamente surgem muitos 0's e 1's consecutivos, os quais não seriam mais que a representação, em numeração binária, de um certo desenho muito particular: exactamente a representação da figura que provocou o cálculo desse mesmo número, a circunferência. O círculo fechava-se!

Para terminar este extenso artigo sobre o número π, umas curiosidades: a fim de facilitar a memorização de grandes quantidades de casas decimais deste número, foram criadas diversas mnemónicas cujo número de letras em cada palavra corresponde ao algarismo respectivo na dízima de π. Como, por exemplo:

"Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux anges" (F. de Vasconcellos),

"How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard" (M. Eves),

"May I have a large container of coffee?" (M. Eves),

ou ainda, a seguinte que fornece 30 casas decimais e é simultaneamente um poema de homenagem a Arquimedes:

"Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal Siracusan, rivaled nevermore
Who in his wondrous lose
Passed on before
Left men his guidance
How to circles mensurate"

Finalmente, para os amantes dos números, um presente: o número π que, sob a forma de fracção se pode representar (aproximadamente) por

$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{3927}{1250}, \frac{103993}{33102}, \ldots,$

admite a seguinte representação decimal com 300 casas decimais exactas:

3. 14159 26535 89793 23846 26433
83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286
20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384
46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211
05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475
64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432
66482 13393 60726 02491 41273

Bibliografia

Borwein, J. M. e Borwein, P. B. (1988). *Ramanujam and Pi*, Scientific American, vol. 258, nº2, Fevereiro.

Borwein, J. M. e Borwein, P. B., Bailey, D. H. e Plouffe, S. (1997) *The quest for Pi*, The Mathematical Intelligencer, vol. 19, nº2.

Dionísio, J. J. (1970). *A constante π na história do pensamento matemático.*

Sagan, C. (1985). *Contacto*. Edições Gradiva.

Wagon, S. (1985). *The evidence — Is π normal?*. The Mathematical Intelligencer, vol. 7, nº 3.

Notas

[1] Consta que essa sua aproximação de π teria sido gravada na pedra tumular do autor, pedra essa que se perdeu. Mais interessante ainda é o facto de, ainda hoje, na Alemanha, π ser frequentemente designado como *número ludolfino* (*Die Ludolphische Zahl*).

[2] Converge quadraticamente, isto é, cada nova iteração duplica aproximadamente o número de algarismos obtidos. Posteriormente foram construídos algoritmos que convergem cubicamente, quarticamente, nonicamente e mais geralmente para qualquer *m*. No entanto, para ordens superiores à quarta, o tempo que o computador consome ao efectuar cada iteração não compensa o maior número de algarismos obtidos de cada vez!...

[3] Recentemente foi produzido um filme baseado nesta obra, tendo a actriz Jodie Foster interpretado a personagem principal.

Joaquim Eurico Nogueira
Univ. Nova de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta foi elaborada pelos colegas Jacinto Salgueiro (Esc. Sec. de Montemor), Adérito Araújo e Paula Bulhão (Esc. Sec. Gabriel Pereira, Évora), no âmbito de um curso de iniciação à utilização das calculadoras gráficas, realizado pelo Projecto T3 da APM. Trata-se de uma actividade de modelação matemática, adequada a alunos do 11° ou 12° anos, que deve ser realizada com o apoio de uma calculadora gráfica ou de um computador.