*O meu presente de Natal para o José Paulo Viana*

# Ronaldo e o *Sketchpad*

*Eduardo Veloso*

Não dei muita atenção ao último "problema deste número". Quando percebi que tratava de futebol, liguei logo à terra. Vi que devia ter que ver com ângulos inscritos em circunferências e esse tipo de coisas, mas porquê o Ronaldo no meio disso tudo? Geometria e realidade é bom, está claro. Mas futebol?! Porque não perguntar qual é o espectador da coxia lateral de uma sala rectangular de cinema que vê melhor o filme? Não pensei mais no problema. Até que, na antevéspera do Natal...

No dia 23 de Dezembro o João Janeiro enviou-me um *e-mail* intitulado "Ronaldo no *Sketchpad*". Uns tempos antes, dissera-me que estava a tentar resolver, com o *Sketchpad*, o problema do último número da revista (ver o enunciado na pág. 38 deste número). Como *attachment* vinha um *sketch* com uma interessante solução, utilizando as possibilidades do programa para traçar gráficos de funções. Reproduzo o *sketch*, com autorização do autor, na figura 1. A solução do João Janeiro despertou-me a curiosidade e fez-me ultrapassar o contexto do futebol... O Ronaldo passou a ser um ponto *R*, a baliiza um segmento *AB*, e comecei a pensar como seria possível encontrar uma solução "puramente geométrica" para o problema. O objectivo seria encontrar uma solução á Euclides, com régua não graduada e compasso.
Seguindo a ideia do João Janeiro, decidi também recorrer ao *Sketchpad*. E aproveitei uns intervalos entre o bacalhau e o perú e umas pausas entre o fazer embrulhos e o colar etiquetas para me regalar com geometria na véspera e no dia de Natal.
Comecei a escrever este artigo no dia 25 à tarde. Nele está descrito o percurso feito até encontrar a solução.

## Surge uma parábola...

As cónicas, em particular a parábola, surgem quando menos se espera em muitos problemas de geometria. Comecei o meu estudo do problema do Ronaldo construindo um *sketch* como o da figura 2. O ângulo *ARB* tem metade da amplitude do ângulo ao centro *AOB*, em que *O* é o centro da circunferência *RAB*. A amplitude do ângulo *ARB* será máxima quando o for a do ângulo *AOB*. Para determinar

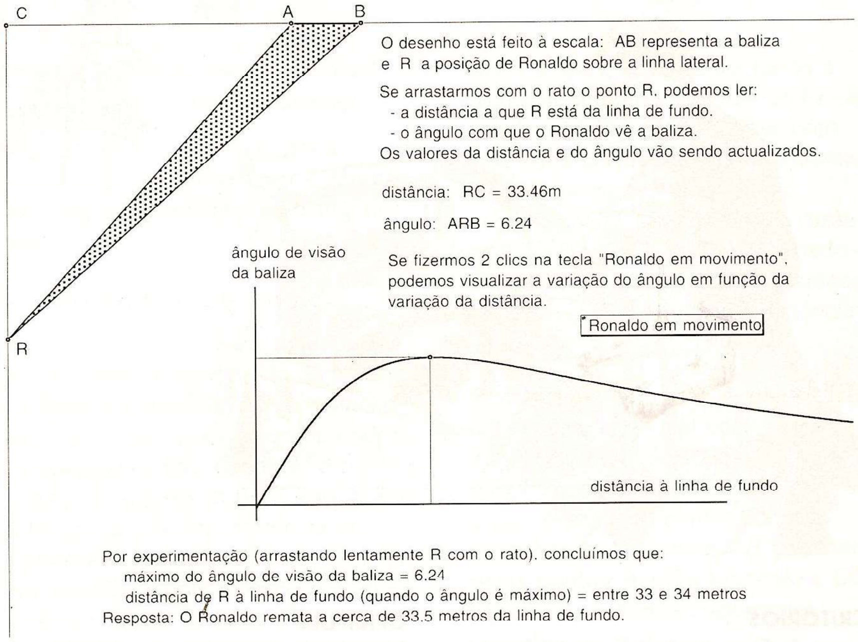


fig. 1- A solução de João Janeiro

o centro *O* basta traçar as mediatrizes das cordas *AB* e *AR*. Se o ponto *R* for construído de modo a poder deslocar-se livremente sobre o segmento *CD*, podemos como no *sketch* do João Janeiro arrastar *R*. Estava interessado em perceber a variação do ponto *O* quando *R* corre para a linha de fundo.. A minha expectativa é que ele se deslocasse, está claro, sobre a mediatriz de *AB*, que atingisse a certa altura a posição mais próxima do segmento *AB*, depois do que voltaria a afastar-se. O ângulo *ARB* seria máximo nesse momento.

Ao arrastar *R*, percebi que na realidade assim era, mas notei também que o movimento da mediatriz do segmento *RA* tinha uma certa regularidade. Resolvi pedir ao *Sketchpad* que desenhasse o rasto da mediatriz (seleccionei a mediatriz e depois escolhi *trace line*, no menú *display*). Quando arrastei de novo o ponto *R*, percebi que as sucessivas posições da mediatriz eram tangentes a uma parábola (ou, por outras palavras, que a parábola era a envolvente dessas posições da mediatriz) (fig. 3).

De outras investigações no *Sketchpad*, já sabia que a parábola que tinha obtido tinha o ponto *A* por foco e a recta *CD* por directriz. O seu vértice era no ponto médio do segmento *AC*. Sabia agora que a posição de *O* que dava a maior amplitude ao ângulo de visão de Ronaldo era a intersecção desta parábola com a mediatriz de *AB*. Para ter uma intersecção bem definida, tracei a parábola como *locus* (menú *construct*), problema lateral que deixo como desafio aos leitores. Obtive então a figura 4.

Estava encontrada uma solução, pois obtido o ponto *O*, o ponto *R* viria em consequência, não perdendo tempo naquele momento a ver como isso se faria.

Confesso no entanto que não estava satisfeito, pois não me parecia que o problema exigisse o recurso a cónicas — ou seja, na linguagem dos gregos, estava convicto que o problema era *plano* (resolúvel com os instrumentos euclidianos, régua não graduada e compasso) e não *sólido* (resolúvel apenas com recurso às cónicas).

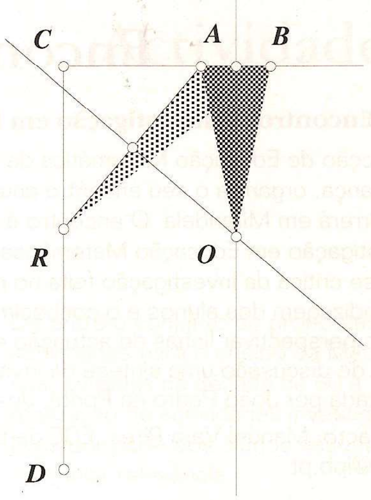

fig. 2

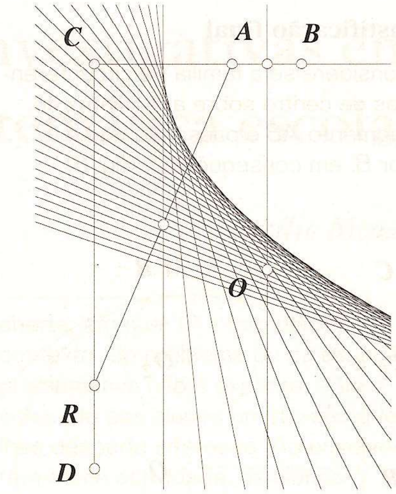

fig. 3

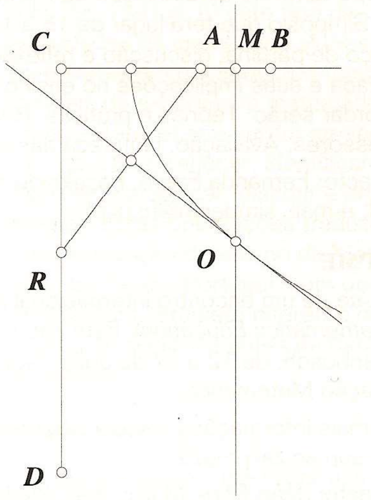

fig. 4

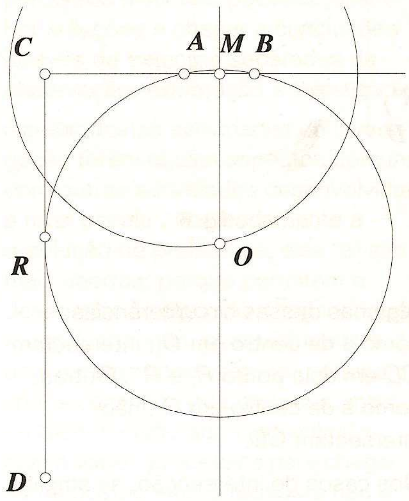

fig. 5

Tentei então ver como poderia determinar *O* sem recorrer à intersecção da parábola com a mediatriz de *AB*.

### Uma solução euclidiana

A solução saltou imediatamente à vista: como *O* é um ponto da parábola de foco *A* e directriz *CD*, a distância de *O* ao foco é igual ao comprimento do segmento *MC*, sendo *M* o ponto médio do segmento *AB*. Logo, O é a intersecção da circunferência de centro em *A* e raio *MC* com a mediatriz de *AB*. Depois o ponto *R* com ângulo máximo de visão obtém-se traçando a circunferência de centro em *O* e raio *OA* e intersectando-a com o segmento *CD*. Quando fiz esta construção (fig. 5), verifiquei, com uma certa surpresa, que esta última circunferência era tangente ao segmento *CD*. Mas não havia razão para surpresas, pois tinha acabado de me servir do facto de que a distância de *O* à directriz era igual á distância ao foco!

Afinal, tinha dado uma longa volta pelas cónicas para chegar a uma conclusão bem mais simples: para encontrar *R*, basta encontrar a circunferência de centro sobre a mediatriz do segmento *AB*, passando pelos pontos *A* e *B* e tangente a *CD*. Mas restava o mais importante: perceber porquê!

### Justificação final

Considere-se a família de circunferências de centro sobre a mediatriz do segmento *AB* e passando por *A* (e por *B*, em consequência) (fig. 6).

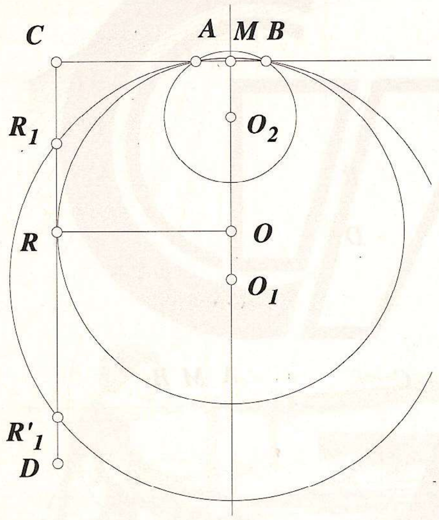


fig. 6

Algumas dessas circunferências, como a de centro em $O_1$, intersectam *CD* em dois ponto $R_1$ e $R'_1$. Outras, como a de centro em $O_2$, não intersectam *CD*.

Nos casos de intersecção, as amplitudes dos ângulos $AR_1B$ e $AR'_1B$ são iguais a metade da amplitude do ângulo $AO_1B$. Então, a solução do problema encontra-se quando o ângulo *AOB* é máximo, isto é, para a circunferência tangente a *CD*. O centro *O* dessa circunferência obtém-se como vimos anteriormente. E *R*, único neste caso, obtém-se tirando por *O* uma perpendicular a *CD* e determinando a intersecção.

Como gosta de salientar José Paulo Viana, normalmente os matemáticos apresentam apenas este tipo de justificações finais e não nos dizem como chegaram a elas, escondendo-nos o que ele, José Paulo, e eu também, consideramos o mais interessante e instrutivo, que é o percurso para aí chegar.

Eduardo Veloso

# Encontros 98

## VII Encontro de Investigação em Educação Matemática

A secção de Educação Matemática da SPCE, em colaboração com a ESE de Bragança, organiza o seu encontro anual em Abril, entre os dias 19 e 21, que decorrerá em Mirandela. O encontro é sobre o tema "Caminhos para a Investigação em Educação Matemática em Portugal". Pretende-se efectuar uma análise critíca da investigação feita no nosso país sobre o currículo, a aprendizagem dos alunos e o conhecimento e a formação de professores, bem como perspectivar linhas de actuação e trabalho futuro. Este encontro tem por base de discussão uma sintese da investigação em educação matemática realizada por João Pedro da Ponte, José Manuel Matos e Paulo Abrantes.

Contacto: Manuel Vara Pires, ESE de Bragança - tel:(073)3303099, e-mail: eiem@ipb.pt

## 2º Simpósio Ensino das Ciências e da Matemática

O Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa promove este Simpósio que terá lugar de 15 a 17 de Junho na FCL. Pretende-se criar um espaço de partilha, discussão e reflexão sobre as práticas e a investigação realizada e suas implicações no ensino das ciências e da matemática. Os temas a abordar serão: Teorias e práticas, Reforma curricular, Formação de professores, Avaliação, Natureza das ciências e Tecnologias de informação.

Contacto: Fernanda Freire, Faculdade de Ciências de Lisboa - tel: 7500049, ext. 1048, e-mail: simpecm@fc.ul.pt

## 22º PME

Trata-se de um encontro internacional promovido pelo grupo de PME (*Psycology of Mathematics Education*). Este ano o encontro decorrerá na África do Sul, em Stellenbosch, de 12 a 17 de Julho, sobre o tema "Diversidade e mudança na educação Matemática".

Para mais informações visite a página deste encontro na Internet: http://www.sun.ac.za/pme22

Contacto: João Filipe Matos, Faculdade de Ciências de Lisboa - tel: 7500049, e-mail: joao.matos@fc.ul.pt

## 50º Encontro da CIEAEM

Trata-se de um encontro internacional que este ano se realiza na Suiça, em Neuchâtel, entre 2 e 7 de Agosto. Os encontros promovidos pela CIEAEM (*Commission Internacionale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*) são temáticos e o tema escolhido para este ano é "As ligações entre a prática da aula e a pesquisa em didáctica das matemáticas.

Para mais informações visite a página deste encontro na Internet: http://www.unine.ch/irdp/cieaem.

Contacto: Tel: (0041)328898601, e-mail: francois.jaquet@irdp.unine.ch

## Primeira Conferência da Sociedade Europeia para Investigação em Educação Matemática

Esta conferência realiza-se na Alemanha, em Osnabrueck, de 27 a 31 de Agosto. Esta sociedade tem por objectivo promover a comunicação, cooperação e colaboração na educação matemática na Europa. Assim, esta conferência baseia-se principalmente em grupos de trabalho que tratam de temas, como: A natureza e o conteúdo da Matemática e a sua relação no ensino aprendizagem, ferramentas e tecnologias na didáctica da Matemática e Interacções sociais em situações de aprendizagem matemática.

Visite a página da Internet: http://www.erme.uni-osnabrueck.de/erme98.html