

Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções

José António Fernandes

Observando representações gráficas de várias funções de uma classe, podemos conjecturar propriedades da classe a que pertencem essas funções. Considerando outros elementos da classe, estamos em condições de avaliar e refinar as conjecturas antes estabelecidas. Ao longo deste processo de representação gráfica de vários elementos da classe, que é muito facilitado pela utilização de tecnologia gráfica, ficamos cada vez mais convictos acerca da plausibilidade das nossas conjecturas.

A utilização de tecnologia gráfica nas aulas de Matemática, particularmente computadores e calculadoras gráficas, permite um estudo mais completo de classes de funções. Para Harvey, Waits e Demana (1995), o estudo de classes de funções será mais profundo no futuro e dependerá tanto das representações gráficas das funções como das suas representações simbólicas.

Observando representações gráficas de várias funções de uma classe, podemos conjecturar propriedades da classe a que pertencem essas funções. Considerando outros elementos da classe, estamos em condições de avaliar e refinar as conjecturas antes estabelecidas. Ao longo deste processo de representação gráfica de vários elementos da classe, que é muito facilitado pela utilização de tecnologia gráfica, ficamos cada vez mais convictos acerca da plausibilidade das nossas conjecturas.¹

Para Zbiek (1995), a evidência proporcionada nesta abordagem indutiva e empírica tem implicações ao nível do raciocínio e da demonstração em matemática. É claro que uma tal evidência, baseada na observação e análise de exemplos, tem consequências diferentes conforme contraria ou confirma uma conjectura.

No caso de encontrarmos um exemplo que contrarie uma conjectura, tal é suficiente para refutá-la. Estamos, aqui, a recorrer a uma demonstração por contra-exemplo.

Já no caso de todos os exemplos estudados confirmarem uma conjectura, tal não é suficiente, em geral, para

afirmar a conjectura como uma propriedade matemática. Só no caso do estudo de todos os exemplos possíveis confirmarem a conjectura é que ela pode ser considerada como propriedade matemática. Mas, quase sempre, em matemática é impossível estudar todos as concretizações possíveis de uma propriedade, pois geralmente elas são em número infinito. Nesta situação, a evidência proporcionada pelos exemplos não pode substituir a demonstração.

A evidência fornecida pelos exemplos que confirmam a conjectura desempenha um papel preponderante ao nível da convicção e da crença na sua validade, sendo, por isso, fundamentalmente subjectiva. Diferentemente, a demonstração, na medida em que se baseia em leis universais da lógica, é fundamentalmente objectiva.

Recorrendo aos diferentes tipos de raciocínio distinguidos em matemática por Fischbein (1990), podemos situar a evidência no raciocínio intuitivo e a demonstração no raciocínio formal.

É de destacar que em termos de ensino, especialmente nos primeiros anos de escolaridade, os alunos abordam a matemática a partir de um raciocínio preponderantemente intuitivo. Um dos muitos exemplos de uma abordagem indutiva e empírica acontece, frequentemente, no estudo das propriedades das operações aritméticas elementares.

Seguindo um processo de exploração de exemplos usando uma calculadora gráfica TI-83, podemos sugerir aos alunos que procurem estabelecer propriedades relativas a diferentes classes de funções envolvendo funções afins e funções quadráticas.

Funções afins

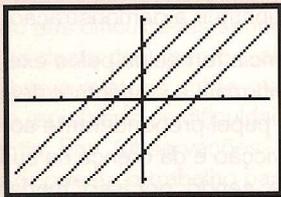
A classe das funções afins tem a forma $y=ax+b$ com $a, b \in \mathcal{R}$.

Atribuindo aos parâmetros a e b diferentes valores reais, obtemos diferentes funções afins. Estudemos os exemplos que se obtêm fixando um dos parâmetros e fazendo variar o outro.

- *Variar o valor de b*

Considerando $a=1$, tem-se a classe de funções $y=x+b$.

Atribuindo ao parâmetro b os valores do conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, obtêm-se cinco funções cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.1.



Representação gráfica da classe de funções $y_1 = x + \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ em $[-4, 7] \times [-3, 1, 3, 11]$.

figura 1

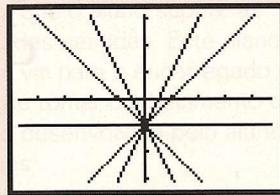
Conclui-se que todos os gráficos das funções são rectas com a mesma inclinação. Portanto, o parâmetro a define o declive da recta que constitui o gráfico da função afim.

- *Variar o valor de a*

Considerando $b=-1$, tem-se a classe de funções $y=ax-1$.

Atribuindo ao parâmetro a os valores do conjunto $\{2, 1, 0, 1, 2\}$, obtêm-se cinco funções cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.2.

Verifica-se que todos os gráficos das funções são rectas que passam pelo ponto de coordenadas $(0, -1)$. Portanto, o parâmetro b define a ordenada na origem da recta que constitui o gráfico da função afim.



Representação gráfica da classe de funções $y_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}x - 1$ em $[-4, 7, 4, 7] \times [-3, 1, 3, 11]$.

figura 2

Funções quadráticas

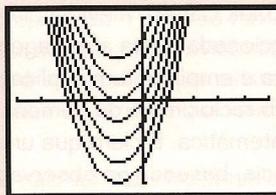
A classe das funções quadráticas tem a forma $y=ax^2+bx+c$, com $a, b, c \in \mathcal{R}$ e $c \neq 0$.

Atribuindo aos parâmetros, a, b e c diferentes valores reais ($c \neq 0$) obtêm-se diferentes funções quadráticas. Estudemos, seguidamente, os exemplos que se obtêm fixando dois dos parâmetros e fazendo variar o terceiro.

- *Variar o valor de c*

considerando $a=1$ e $b=2$, tem-se a classe de funções $y=x^2+2x+c$.

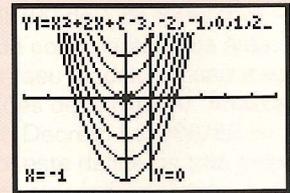
Atribuindo ao parâmetro c os valores do conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ obtêm-se seis funções, cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.3.



Representação gráfica da classe de funções $y_1 = x^2 + 2x + \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ em $[-5, 5] \times [-4, 4]$.

figura 3

Parece plausível concluir que os vértices das parábolas, que constituem os gráficos das funções quadráticas, estão sobre a recta vertical de equação $x = -1$. (ver fig. 4).



Representação gráfica da classe de funções $y_1 = x^2 + 2x + \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ e da recta $x=-1$ em $[-5, 5] \times [-4, 4]$.

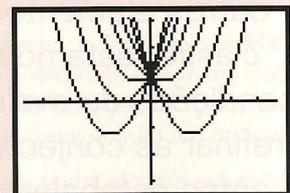
figura 4

Em termos algébricos, verificando que a equação $y=x^2+2x+c$ é equivalente a $y=(x+1)^2+c-1$, conclui-se que o par ordenado $(-1, c-1)$ define as coordenadas dos vértices das parábolas. Em consequência, qualquer dos vértices das parábolas está sobre a recta vertical de equação $x=-1$.

- *Variar o valor de b*

Considerando $a=c=1$, tem-se a classe de funções $y=x^2+bx+1$.

Atribuindo ao parâmetro b os valores do conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ obtêm-se sete funções, cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.5.



Representação gráfica da classe de funções $y_2 = x^2 + \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}x + 1$ em $[-4, 7, 4, 7] \times [-3, 1, 3, 11]$.

figura 5

Representemos, agora, apenas os pontos correspondentes aos vértices das parábolas consideradas.

Observando o lugar geométrico dos pontos, parece que eles se situam sobre uma outra parábola. Ajustando uma parábola aos pontos, recorrendo a uma regressão quadrática, verifica-

se que a parábola de equação $y=-x^2+1$ constitui um ajuste perfeito ao conjunto de pontos considerados, conforme se mostra na fig. 6.

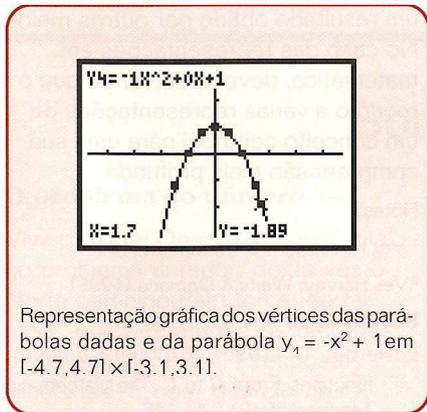


figura 6

Em termos algébricos, verificando que a equação $y=x^2+bx+1$ é equivalente à

$$y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4}$$

conclui-se que o par ordenado

$$\left(-\frac{b}{2}, 1 - \frac{b^2}{4}\right)$$

define as coordenadas dos vértices das parábolas. Em consequência, qualquer dos vértices das parábolas está sobre a parábola de equação $y=-x^2+1$.

• Variar o valor de a

Considerando $b=1$ e $c=-1$, tem-se a classe de funções $y=ax^2+x-1$.

Atribuindo ao parâmetro a os valores do conjunto $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ obtêm-se seis funções, cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.7.

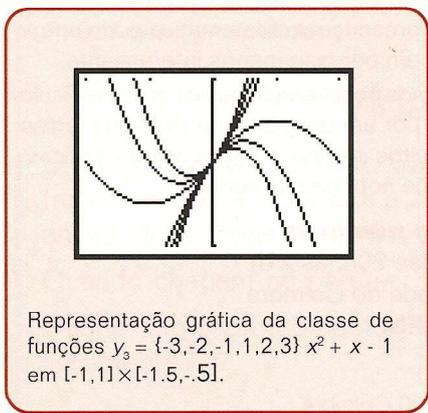


figura 7

Representemos, agora, apenas os pontos correspondentes aos vértices das parábolas consideradas. Observando o lugar geométrico dos pontos, parece que eles se situam sobre uma recta. Ajustando uma recta aos pontos, recorrendo a uma regressão linear, verifica-se que a recta de equação $y=0.5x-1$ constitui um ajuste perfeito ao conjunto de pontos considerados, conforme se mostra na fig. 8.

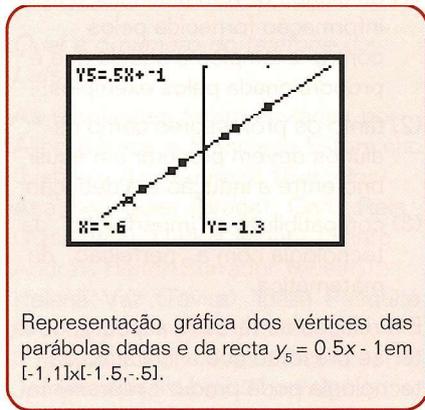


figura 8

Em termos algébricos, verificando que

$$a \text{ equação } y = a\left(x + \frac{1}{2a}\right)^2 - 1 - \frac{1}{4a}$$

é equivalente à equação $y=ax^2+x-1$, conclui-se que o par ordenado

$$\left(-\frac{1}{2a}, -1 - \frac{1}{4a}\right)$$

define as coordenadas dos vértices das parábolas. Em consequência, qualquer dos vértices das parábolas está sobre a recta de equação $y=0.5x-1$.

• Variar o valor de a de modo a tender para zero

Considerando $b=c=1$, tem-se a classe de funções $y=ax^2+x+1$.

Atribuindo ao parâmetro a os valores do conjunto $\{1,0.5,0.2,0.1,0.05\}$, obtêm-se cinco funções cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.9.

Constata-se que à medida que o valor de a se aproxima de zero a parábola correspondente à função, no rectângulo de visualização definido, aproxima-se da recta de equação $y=x+1$.

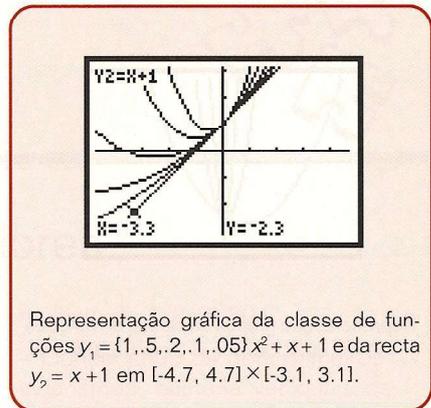


figura 9

Representação gráfica da classe de funções $y_1 = \{1, .5, .2, .1, .05\}x^2 + x + 1$ e da recta $y_2 = x + 1$ em $[-4.7, 4.7] \times [-3.1, 3.1]$.

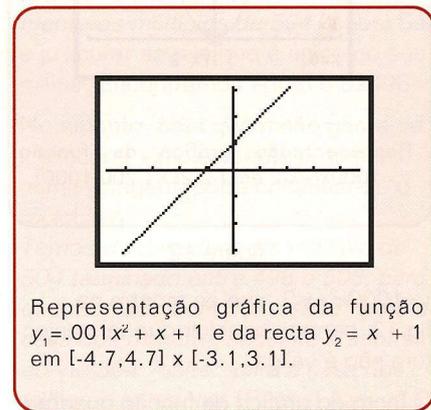


figura 10

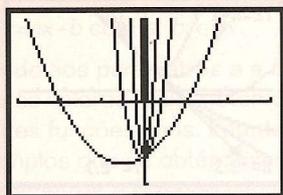
No caso da função $y=0.001x^2+x+1$, a parábola que constitui o seu gráfico não se distingue do gráfico da recta $y=x+1$, conforme se observa na fig.10.

A conclusão a que chegámos quando a tende para zero por valores positivos mantém-se quando a tende para zero por valores negativos.

• Variar o valor de a de modo a tender para infinito

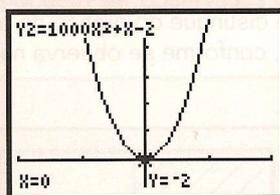
Considerando $b=1$ e $c=2$, tem-se a classe de funções $y=ax^2+x-2$. Atribuindo ao parâmetro a os valores do conjunto $\{1,10,50,1000\}$, obtêm-se quatro funções cujas representações gráficas podem ser observadas na fig.11.

Seria razoável conjecturar que quando a tende para infinito por valores positivos, as parábolas que constituem os gráficos das funções tendem para uma semi-recta vertical. Contudo, a representação gráfica da função



Representação gráfica da classe de funções $y_2 = \{1, 10, 50, 1000\}x^2 + x - 2$ em $[-3,3] \times [-3,3]$.

figura 11



Representação gráfica da função $y_2 = 1000x^2 + x - 2$ em $[-2,2] \times [-200, 1000]$.

figura 12

$y = 1000x^2 + x - 2$, que se mostra na fig. 12, permite concluir que tal conjectura não é válida.

O facto do gráfico da função quadrática constituir ainda uma parábola quando a tende para infinito por valores positivos mantém-se também para o caso em que a tende para infinito por valores negativos.

Conclusão

Referimo-nos neste texto ao estudo de propriedades de uma classe de funções. Todavia, podemos definir funções através da combinação de elementos de diferentes classes e que não pertençam a qualquer das classes consideradas. Por exemplo, a função $y = \log(x^2 - 1)$ obtém-se combinando uma função quadrática com uma função logarítmica. Esta forma de construir funções, combinando elementos de diferentes classes, reveste-se de uma importância fundamental no estudo de situações

da vida real, pois muito frequentemente as funções que modelam essas situações pertencem a uma tal categoria.²

Segundo Zbiek (1995), o facto de incentivarmos os alunos a usar tecnologia para estabelecer e avaliar conjecturas, implica a consideração de três aspectos essenciais relacionados com a dualidade evidência *versus* demonstração:

- (1) os alunos devem distinguir entre a informação fornecida pelos contra-exemplos e aquela que é proporcionada pelos exemplos;
- (2) tanto os professores como os alunos devem procurar um equilíbrio entre a indução e a dedução;
- (3) compatibilizar a "imperfeição" da tecnologia com a "perfeição" da matemática.

Em relação ao terceiro aspecto, deve ter-se presente que a limitação da tecnologia pode produzir representações inapropriadas que podem estar na origem de generalizações erradas.

Finalmente, a representação gráfica, em algumas situações constitui a única forma do estudante abordar um problema. Mesmo nas situações em que a representação algébrica ou numérica pode ser usada, a representação gráfica desempenha ainda

assim um papel relevante, pois constitui mais uma forma de representação matemática e pode ser usada como uma possibilidade de confirmar um resultado obtido por outros meios. No caso das representações em matemática, deve observar-se que o recurso a várias representações de um conceito contribui para uma sua compreensão mais profunda.

Notas:

¹ Ver Hirschhorn & Thompson (1996)

² Ver Harvey, Waits & Demana (1995)

Referências

- Edwards, T. (1996). Exploring quadratic functions: From a to C . *The Mathematics Teacher*, 89 (2), 144-146.
- Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research*, 14, 31-50.
- Harvey, J., Waits, B. & Demana, F. (1995). The influence of technology on the teaching and learning of algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14 (1), 75-109.
- Hirschhorn, D. & Thompson, D. (1996). Technology and reasoning in algebra and geometry. *The Mathematics Teacher*, 89 (2), 138-142.
- Zbiek, R. (1995). Reaction to Harvey, Waits, and Demana's article. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14 (1), 133-137.

José António Fernandes
Assistente no Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho

A Matemática e tudo à volta.

Aceitamos sugestões, reclamações, questões...

A actividade matemática dos professores não se confina às paredes da sala de aula ou mesmo aos muros da escola. Os ProfMats têm-nos ajudado a perceber isso, conhecendo actividades (mais ligadas ou mais afastadas da profissão) que alguns colegas desenvolvem e em que a presença da Matemática pode surgir de uma forma talvez não esperada mas nem por isso menos interessante. No ProfMat 97, na Figueira da Foz, soubemos por exemplo que os colegas Paulo Saraiva e Fausto Silva são responsáveis por um programa de rádio, na região centro do país, e ficariam muito satisfeitos se lhe comunicassem críticas, sugestões, etc. Se está interessado, tome note na sua agenda:

Histórias com números

todas as 4^{as} feiras das 20h. às 21h.
na Rádio Universidade de Coimbra

107.9 FM

Pode escrever para a seguinte morada:
Histórias com números, Apartado 1117, 3000 Coimbra
ou utilizar o correio electrónico: psaraiva@condor.ci.uc.pt