Tecnologias no Laboratório de Matemática

Adelina Precatado, Conceição Antunes, Paula Teixeira

O programa do ensino secundário, que este ano entrou em vigor, valoriza a utilização de tecnologias na aula de Matemática. Refere nomeadamente: "É considerado indispensável o uso de calculadoras gráficas que desempenham uma parte das funções antes apenas possíveis num computador (...) um computador ligado a um "datashow" para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os alunos ao mesmo tempo". Mas os programas referem também que "deve tender-se para a constituição nas escolas secundárias de Laboratórios de Matemática que integrem estes recursos e outros que se venham a revelar necessários"[1].

A questão central é que é indispensável que, na escola, os alunos sejam, de alguma forma, encorajados pela tecnologia ou pelo desafio de situações problemáticas significativas, dentro e fora da sala de aula, a explorar, a experimentar, a investigar, a fazer conjecturas e a validá-las, a procurar e manipular modelos em geometria, funções ou estatística, em completa "liberdade para aprender".

O Laboratório de Matemática deve ser entendido como um espaço físico próprio para o ensino e aprendizagem da Matemática, equipado com recursos diversificados, tecnológicos e outros, onde seja possível criar um ambiente propício à experimentação e à descoberta, à aprendizagem da Matemática.

> O Laboratório de Matemática deve ser entendido como um espaço físico próprio para o ensino e aprendizagem da Matemática, equipado com recursos diversificados, tecnológicos e outros, onde seja possível criar um ambiente propício à experimentação e à descoberta, à aprendizagem da Matemática.

As ferramentas tecnológicas hoje disponíveis desde as calculadoras científicas e gráficas aos programas de computador, vídeos ou à Internet, não sendo por si suficientes para criar o ambiente de que falámos, são no entanto indispensáveis e, se bem utilizadas, podem ser um contributo importante no sentido de proporcionarem situações de trabalho estimulante e criativo em Matemática, dando resposta à natural curiosidade sempre crescente dos alunos.

Mas afinal o que é um Laboratório de Matemática? Como se organiza? O que são actividades experimentais em Matemática? Em Matemática também se experimenta? Que sentido tem essa experimentação? Estas são questões que hoje se colocam a qualquer professor de Matemática, as respostas nem sempre são fáceis nem únicas mas vão aparecendo com o decorrer do tempo.

Vejamos, a sala de aula pode ser um Laboratório de Matemática quando ela funciona de modo a que os alunos em trabalho individual ou em grupo usam as calculadoras gráficas no estudo de famílias de funções, quando usam um programa de computador na geometria, quando constroem e manipulam materiais para o estudo da geometria ou as funções, etc... quando experimentam, descobrem relações, conjecturam e por vezes até provam.

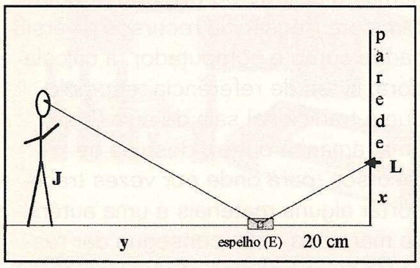
Mas a maior parte das actividades que apresentamos aos alunos não cabem numa só aula de 50 minutos e requerem com frequência recursos diversificados como o computador, a calculadora, livros de referência, etc, pelo que a tradicional sala de aula (hoje uma, amanhã outra), despida de recursos, para onde por vezes transportar alguns materiais é uma autêntica maratona, não consegue dar resposta a um trabalho eficaz e continuado. Portanto, tal como acontece noutras disciplinas (Física, Biologia, Química, ...) devem ser organizadas salas especiais em Matemática, ou sejam, Laboratórios de Matemática.

Quando falamos em actividades experimentais ou em matemática experimental encaramos este aspecto de forma bastante ampla. A experiência sempre foi e continuará a ser, um método importante de descoberta em Matemática. A experimentação é, pelo menos, uma parte importante do processo matemático. É, pois, fundamental que os alunos também tenham oportunidades de experimentar, de descobrir, de conjecturar, de perceber que algumas das suas conjecturas podem ser provadas, que outras são colocadas de lado porque são falsas e que outras se mantêm como conjecturas.

A questão fundamental que se coloca ao professor de Matemática é a forma como os alunos aprendem e "fazem" Matemática e isso não é independente da sua "experiência matemática" na sala de aula, ou seja da natureza das actividades que tiveram oportunidade de desenvolver, dos recursos disponíveis, do ambiente de aprendizagem que foi possível criar. Desta forma talvez possamos não só proporcionar uma relação mais amigável entre os alunos e a Matemática mas também uma visão mais correcta do que efectivamente é esta disciplina.

Apresentamos a seguir um conjunto de actividades que pela sua natureza e pelos recursos que pressupõem pensamos poderem ilustrar as ideias que temos sobre a utilização da tecnologia no Laboratório de Matemática.

1. Espelhos e reflexões

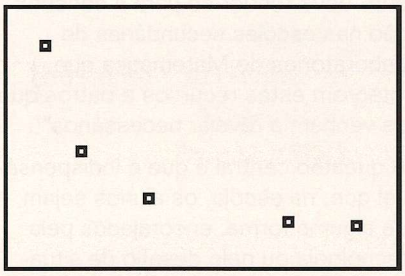


A que distância (y) do espelho (E) se deve colocar o João (J) de modo a ver no espelho a imagem de um lápis (L) colocado por outro colega na parede da sala de aula, a 10 cm do chão? E se o lápis for colocado a 15, 20, ... x cm, a que distância se deve colocar o João?

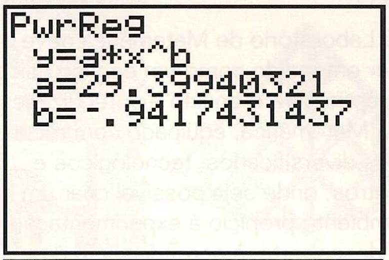
Na experiência que realizámos o João media 1.66 m e recolhemos os seguintes dados:

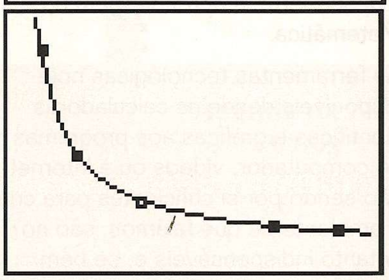
dist. do lápis ao chão (X)	dist. do João ao espelho (y)
10 cm	3,50
20 cm	1,70
40 cm	0,86
80 cm	0,49
100 cm	0,39

Introduzidos os dados numa calculadora gráfica uma primeira análise pode ser feita através do diagrama de dispersão.



Uma função que modele a situação pode ser encontrada também, directamente com a calculadora, através de uma regressão:





Ou seja, um modelo possível é dado pela função $y = 29.39940321x^{-0,9417431437}$.

Mas este será o melhor modelo?

Porque não fazer uma simulação da situação utilizando o Cabri II?

Utilizámos uma TI92, para simular a situação no Cabri. (fig.1)

Depois de representada a situação, medidas as distâncias do lápis ao chão (x), do espelho à parede, do espelho ao pé do observador (y) e recorrendo à ferramenta de animação é possível simular o andamento do João, movendo o "pé" em direcção ao espelho e recolher as sucessivas medidas de x e de y. (figs. 2, 3 e 4)

Aberto o ficheiro *sysdata* onde foram colocados os dados recolhidos é agora possível representar graficamente a situação, observar a tabela, construir uma coluna para o produto xy. (fig.5)

Alertando os alunos para a relação de semelhança entre os dois triângulos surge, talvez, um outro modelo através de uma função de proporcionalidade inversa. No caso inicial, dado que o João tinha 1.66m e a distância do espelho à parede era 20 cm a função será $y = \frac{1,66 \times 20}{x}$.

Nesta altura pode ser discutido qual dos dois modelos é melhor. Porque é que os dados recolhidos no início, de forma experimental, não coincidiram exactamente com os fornecidos pelo modelo de proporcionalidade inversa?

É uma experiência extremamente simples que possibilita o estabelecimento de conexões entre vários conhecimentos matemáticos (funções, geometria, estatística) e uma discussão em torno da importância das condições de recolha dos dados experimentais, das potencialidades e limitações da tecnologia, da validade de diversos modelos para uma mesma situação, da necessidade de criticar e confrontar o modelo encontrado com os dados da realidade e com os conhecimentos disponíveis sobre o assunto a ser estudado.

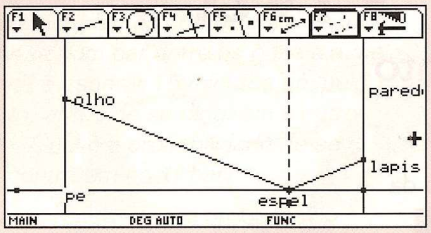


figura 1

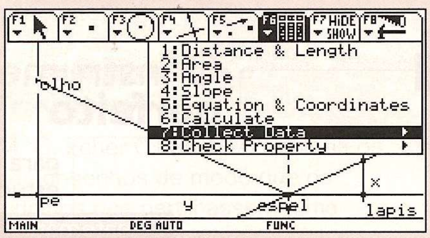


figura 2

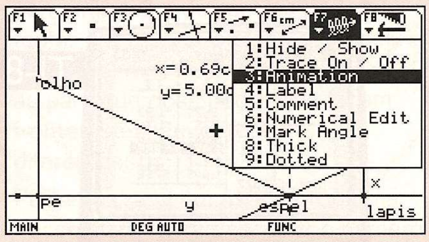


figura 3

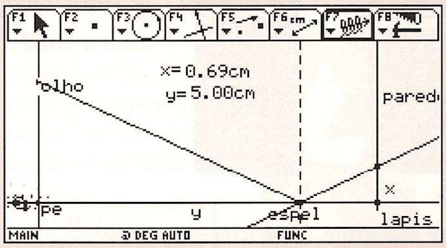


figura 4

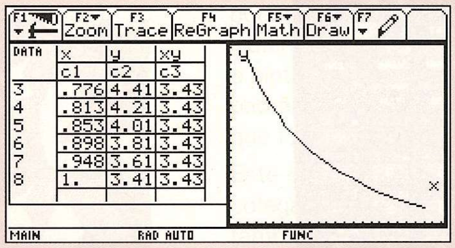
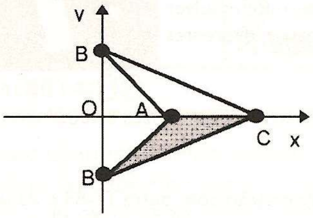


figura 5

2. Triângulo de área máxima

Num referencial o. n. do plano marcam-se os pontos A, B e C tais que: C (4,0) : $A \in [OC]$; $\overline{OA} = \overline{OB}$ e B é um ponto do eixo das ordenadas.

Quais são as coordenadas dos pontos A e B de modo que a área do triângulo ABC seja máxima?



Reconhecidas as duas soluções para o ponto B, o problema pode ser resolvido de diversas formas. Se utilizarmos o *Geometer's Sketchpad* é possível construir o triângulo nas condições indicadas e pedir as medidas de OA, OC e da área do triângulo. Deslocando o ponto A descobrimos por experimentação coordenadas que tornam a área máxima e consequentemente as coordenadas dos dois pontos aqui designados por B. É ainda possível pedir uma representação gráfica da função área.

O problema pode ser generalizado, fazendo agora variar C e descobrindo que, no caso geral, a área é máxima quando A for o ponto médio do segmento OC. (fig.6)

Mais uma vez, de uma forma experimental e simples os alunos têm oportunidade de resolver o problema, de descobrir e generalizar. Evidentemente que os alunos podem e devem ser desafiados a escrever uma expressão analítica para a função área e a tentar provar algebricamente as conclusões a que chegaram experimentalmente.

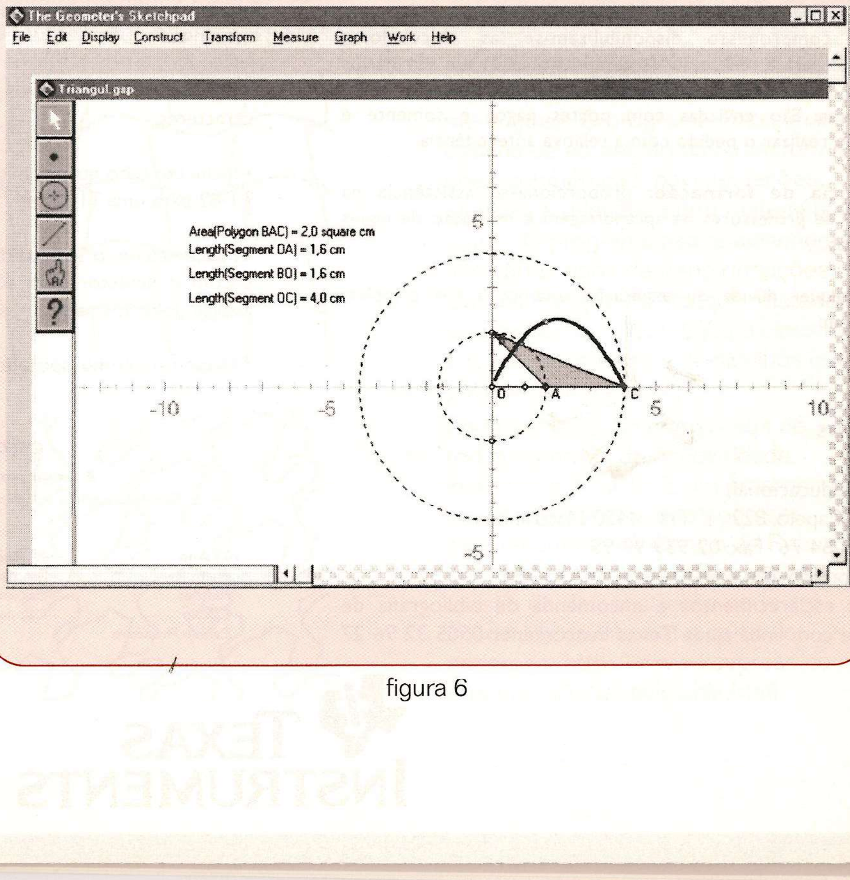


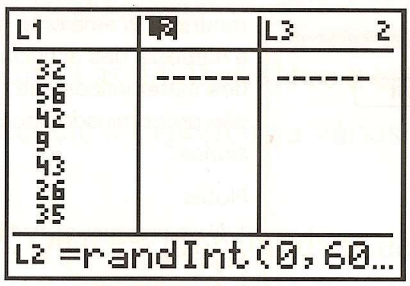
figura 6

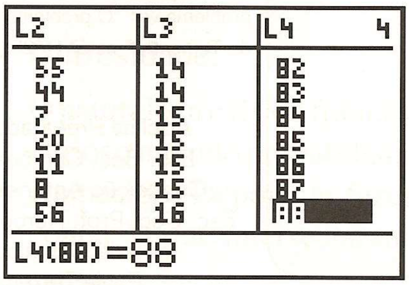
3. O encontro

Dois estudantes combinaram encontrar-se num bar entre as onze e a meia noite e esperar 15 minutos um pelo outro antes de se dirigirem a outro bar. Qual é a probabilidade de se encontrarem no 1º bar?

Como resolver este problema? Porque não experimentar, ou seja fazer uma simulação da situação?

Com uma TI83, gerámos uma sequência de 200 números aleatórios, entre 0 e 60 (correspondendo aos 60 minutos), para cada um dos amigos, para isso basta introduzir na calculadora a expressão *RandInt(0,60,200)*.

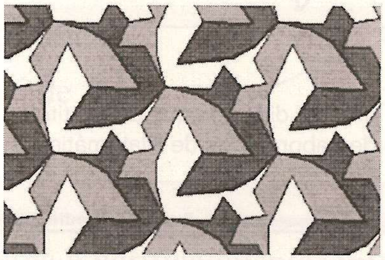




Na lista L3 introduzimos o valor absoluto da diferença entre L1 e L2 através da expressão *abs(L1-L2)*. Para facilitar a contagem ordenámos a coluna L3 e criámos uma coluna L4 para contagem. Em 87 casos, dos 200 considerados, a diferença entre as horas de chegada é inferior ou igual a 15 minutos. A probabilidade será portanto cerca de 44%. Podem ser feitas outras experiências, aumentado o número de casos, recorrendo por exemplo a uma folha de cálculo. Será uma boa resolução? Uma coisa é certa: poucos alunos resolveriam este problema por outro processo. E, num contexto prático, de resolução do problema, não será suficiente saber que a probabilidade de se encontrarem é de cerca de quarenta e quatro por cento?[2]

4. Pavimentar com o Tesselmania

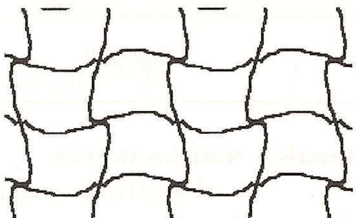
M. C. Echer (1898-1972) coloria os seu desenhos de modo que os ladrilhos que partilhassem uma fronteira tivessem cores contrastantes.

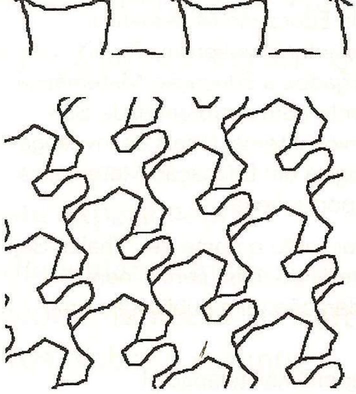


Quantas cores são necessárias para conseguir este efeito?

Vamos examinar algumas das transformações que podem ocorrer numa pavimentação e determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir cada ladrilho nas diferentes situações.

Como pintar os dois padrões abaixo de modo a que nenhum de dois ladrilhos que partilham a mesma fronteira tenham a mesma cor? Quantas cores são necessárias?





Se copiarmos cada uma das figuras para uma folha de acetato podemos tentar pavimentar o plano e descobrir o número mínimo de cores necessárias para que duas peças que façam fronteira tenham cores diferentes.(fig.7)

Podemos também usar o programa Tesselmania para descobrir o número mínimo de cores necessárias para colorir uma pavimentação. Para isso podemos seleccionar cada tipo de ladrilho base do programa, modificá-lo e pintá-lo. Depois o programa cria o padrão e regista o número de cores que foram necessárias.

Este é um desafio que deixamos aos colegas leitores da revista e que também pode ser colocado aos alunos, sugerindo-lhes que:

- descrevam os resultados a que chegarem e os discutam com os colegas;
- façam conjecturas tendo em conta que as características de um ladrilho ou do seu padrão estão relacionadas com o número mínimo de cores necessárias para o padrão;
- testem a hipótese formulada usando o Tesselmania;
- imprimam os estudos que forem fazendo para demonstrar a sua teoria.

Um dos assuntos estudados ao longo da escolaridade é o tema das pavimentações. O programa *Tesselmania* destina-se ao estudo das transformações geométricas, pavimentações, padrões e relações entre matemática e arte. O programa usa relativamente aos vários tipos de transformações do plano a notação de Heesch, matemático Alemão, que investigou e classificou as várias formas de ladrilhos que pavimentam o plano.

Pode ser utilizado com alunos de todos os níveis de escolaridade, incluindo o 1º ciclo. É um programa muito interessante que pode ser experimentado no Centro de Recursos da APM (versão Windows) e cuja versão de demonstração pode ser importada da Internet a partir do endereço: http://www.keypress.com/product_info/tesselmania.html

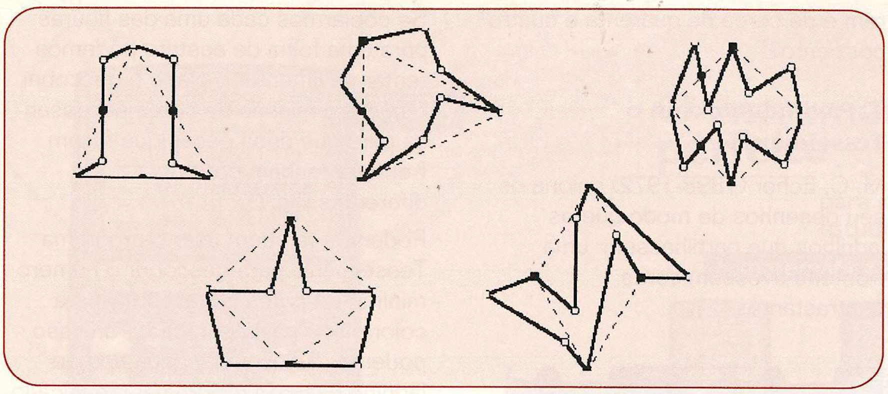


figura 7

5. A Internet, as agulhas de Buffon e o número π

E para terminar uma experiência bastante conhecida mas que desperta sempre o interesse dos alunos.

Se lançarmos uma agulha sobre uma cartolina onde foram desenhadas rectas paralelas situadas à distância umas das outras do dobro do comprimento da agulha, qual é a probabilidade de a agulha intersectar uma das rectas? E o inverso desta probabilidade?

Os alunos podem realizar a experiência com uma cartolina e agulhas, mas porque não fazer uma viagem na Internet, entrar na página http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html, fazer a simulação e descobrir, tal como Buffon descobriu, que afinal o inverso desta probabilidade é o número π. (fig.8)

Em síntese, diríamos que a constituição de Laboratórios de Matemática, encarados como espaços próprios e ricos em recursos tecnológicos e outros, é hoje uma exigência não só no ensino secundário mas também para os outros ciclos.

É preciso ter consciência que a existência de Laboratórios não significará por si só a resolução dos muitos problemas que se colocam ao ensino da Matemática e muito menos à escola. No entanto, para que os alunos desenvolvam capacidades de explorar, conjecturar, formular e resolver problemas, argumentar e comunicar, tal como prevêm os actuais programas, é fundamental não esquecer o espaço, os recursos, o ambiente e a natureza das actividades matemáticas que são proporcinados aos alunos.

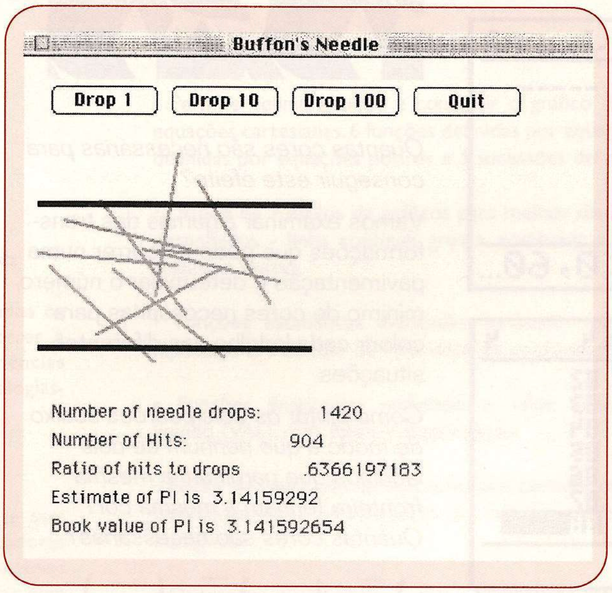


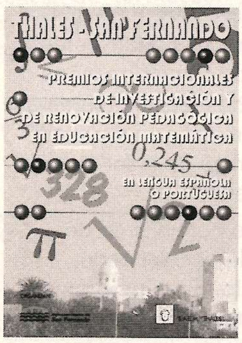
figura 8

Notas

1. Novo programa ajustado, página 10.
2. A propósito deste problema ver "O problema do Trimestre" na *EM* nº25.

Adelina Precatado
Esc. Sec. Camões
Conceição Antunes
Esc. Sec. Prof. Herculano de Carvalho
Paula Teixeira
Esc. Sec. da Amadora

Prémios Internacionais • Notícias breves



Prémios Internacionais

A Sociedade Andaluza de Educação Matemática THALES tem entre outros objectivospromover a Investigação em temas ligados à Educação Matemática. Assim, THALES juntamente com outra entidade San Fernando, atribuem prémios internacionais de investigação e renovação pedagógica em Educação Matemática, em língua espanhola ou portuguesa.

Os trabalhos a apresentar terão o nome de "Thales-San Fernando" deverão ser originais e não poderão ter sido, nem parcial nem totalmente, publicados nem submetidos a consideração para publicação em alguma revista.

Para mais informações contacte a APM, email: apm@mail.telepac.pt

Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta é uma das referidas no artigo "Tecnologias no Laboratório de Matemática" da autoria de Adelina Precatado, Conceição Antunes e Paula Teixeira, publicado nesta revista.

Esta proposta apresenta um processo experimental para a determinação de π e a utilização da Internet para "correr" uma simulação relativa às agulhas de Buffon.