Para este número seleccionámos

Experiências imaginárias: Provas em ambiente de computador[1]

John Costello

O artigo seguinte incide nos efeitos que o computador pode ter na educação matemática. A sua grande originalidade reside na especial atenção dada à vertente demonstrativa. Na verdade, é ponto assente que as novas tecnologias são um precioso auxiliar na realização de investigações e cálculos de rotina. Bastante menos explorada é a questão do seu impacto na actividade demonstrativa.

O artigo começa por indicar os traços fundamentais da abordagem formalista, ainda hoje explícita ou implicitamente dominante no ensino desta disciplina. De seguida, contrasta o tipo de prova que se realiza nesta abordagem com as provas que é possível realizar num micromundo computacional. Analisa as limitações dos micromundos e discute o modo como o computador poderá proporcionar provas francamente mais acessíveis que as provas de cunho formalista.

O autor é John Costello, que trabalha na Loughborough University, em Inglaterra, onde é responsável por um programa de formação de professores de Matemática do ensino secundário. Os seus interesses académicos incluem a Educação Matemática, a Lógica e os fundamentos da Matemática. Em 1991 publicou um livro analisando as mudanças em curso no ensino da Matemática no seu país, incluindo o ensino individualizado, investigações na sala de aula, computadores e exames nacionais, tendo em conta aspectos como a educação multicultural, diferenças entre sexos e alunos com necessidades especiais.

Formalismo e prova em educação matemática

Durante grande parte do século vinte a filosofia matemática foi dominada pela visão formalista dos fundamentos da matemática. De acordo com esta visão, os objectos matemáticos — conjuntos, números, formas geométricas, etc. — existem apenas num sentido formal: eles são as cadeias de símbolos que os representam e definem. Claro, estas coisas formais podem ser usadas para modelar o mundo real; e tais modelos matemáticos dão-nos muito poder, tanto para compreender melhor o mundo, como para lidar com ele. Mas a matemática por si só não tem existência para além da sua representação formal: não há um universo Platonista no qual existam estas abstracções.

De forma estranha os matemáticos *comportam-se* como se as abstracções tivessem alguma realidade externa. Exploram estruturas, números e configurações geométricas e aparentam fazer novas descobertas através desta exploração. Deste modo, parece não haver uma grande diferença, dizem eles, entre a descoberta de que Urano e Neptuno têm imensos satélites e a descoberta de que um certo conjunto de grandes números são primos. Os astrónomos, por seu turno, garantem-nos que as luas estão realmente lá algures. Por outro lado, os matemáticos, quando pressionados, mais facilmente recuam para o formalismo: estes números são nada mais, nada menos que símbolos — e as suas propriedades e relações são-lhes todas conferidas pelos nossos axiomas e definições. Os teoremas são apenas tautologias lógicas, obtidas dos axiomas e definições através de certas regras de inferência.

Tem de ser assim. Afinal, se começarmos a atribuir existência a abstracções, caminhamos na direcção de as colocar num ambiente místico fora do nosso universo físico — o que dificilmente poderemos aceitar. Algo deste dilema foi retido por Davis e Hersh (1996), que escreveram "o investigador matemático típico é um platonista nos dias de semana e um formalista nos domingos".

O professor de matemática típico, no entanto, coloca-se numa posição quase diametralmente oposta. Fre-

1. Artigo traduzido da revista *Micromath*, vol. 10, nº3, 1994, pp.21 - 25, com autorização da Association of Teachers of Mathematics, do Reino Unido.

quentemente, a actividade de sala de aula sugere que a matemática é tratada como uma actividade puramente formal. Muita da matemática escolar parece envolver a manipulação de cadeias de símbolos. As regras desta manipulação podem ser aprendidas e aplicadas, sem que se dê significado aos resultados.

No entanto, apesar das aparências, o formalismo é uma heresia educacional. Os professores acreditam em (e estão comprometidos com) coisas chamadas "conceitos", que permanecem por detrás da linguagem formal e do simbolismo. Tomemos, por exemplo, o tópico de área. As lições podem envolver o cálculo de imensas áreas e a aprendizagem de métodos e fórmulas relacionados com esses cálculos. Mas, a maior parte dos professores argumentariam que é mais importante para os alunos compreenderem o que *é* a área; e este é o contraponto filosófico. A área é um conceito: tem uma existência para além do cálculo e da manipulação de símbolos. É aqui que os professores se afastam tão radicalmente da descrição matemática de Davis e Hersh: os professores podem comportar-se como formalistas, mas em grande parte do tempo a sua posição filosófica está mais próxima do platonismo.

No entanto, no que diz respeito à prova em educação matemática a ênfase permanece totalmente no formalismo. A única prova genuína é uma prova formal. Trata-se apenas de escrever símbolos numa ordem precisa e estandardizada, por forma a impôr uma estrutura consistente e lógica para o todo da matemática. Há com certeza professores que argumentam que a prova é um assunto pessoal ou que é muito dependente da cultura e do contexto; mas dificilmente se encontram bons exemplos desta filosofia em prática.

A agenda formalista da matemática do século vinte foi extremamente poderosa em promover a sistematização da matemática numa estrutura dedutiva estandardizada. Na sua introdução a *Provas e Refutações*, Lakatos (1976) expressou-o da seguinte forma:

Acontece frequentemente na história do pensamento, que quando um novo método poderoso emerge, o estudo dos problemas que podem ser por ele resolvidos, avança rapidamente e atrai a atenção geral, enquanto o resto tende a ser ignorado ou até mesmo esquecido...

Se este depoimento fosse escrito fora do contexto, por si só, numa página, não conseguiríamos descobrir do que é que trata. Assemelha-se muito mais a um depoimento sobre computadores do que sobre a filosofia formalista. Assim, temos um inesperado paralelo. Os computadores fornecem-nos um novo meio poderoso de tratar a matemática. Durante grande parte deste século um programa formalista teve comparável (embora muito diferente) poder. O papel da prova na estrutura formal foi relativamente claro. Então, que diferença fazem os computadores?

A abordagem lógica formalista é totalmente sintética. Separa a matemática da história e da sua psicologia. Apresenta, ordena, desenvolve e justifica o conhecimento matemático de uma forma sistemática, o que é bastante diferente da forma sob a qual esse conhecimento foi criado historicamente e sob a forma em que é apreendido. Esta aproximação impõe uma estrutura detalhada da matemática. Praticamente impossibilita o estudante de construir provas em vez de simplesmente as aprender, porque o lugar de qualquer resultado na hierarquia matemática é fortemente forçado. No entanto, sabemos muito bem que os estudantes e até crianças novas apreciam a prova e argumentam de forma dedutiva. Tal prova tem pouco a ver com a sistematização formal: a questão é como saber que algo é sempre verdadeiro e como se convencer a si próprio e aos outros.

Lakatos oferece um modelo de prova como uma "experiência imaginária". Este é um padrão antigo da prova matemática, conhecido pelos matemáticos pré-euclidianos gregos como *deiknymi*. A ilustração detalhada em *Provas e Refutações* é a relação $V+F-A = 2$, relacionando os vértices, arestas e faces de um poliedro. Como poderemos desenvolver este teorema? Bem, primeiramente tomamos uns poucos poliedros particulares, contamos os seus vértices, faces e arestas e formulamos uma regra que os relacione. Então concebemos uma experiência imaginária para justificar a regra em geral.

A experiência imaginária é a seguinte. Tomamos o nosso poliedro e fazemos um buraco numa das suas faces. De seguida puxamos e esticamos o buraco até que o poliedro se apresente numa rede plana. Depois, montamos esta rede em forma triangular e desmantelamo-la, um arco de cada vez, até que obtenhamos um só triângulo. Temos sempre de verificar se estes processos não alteram o valor de $V+F-A$.

Há duas considerações a fazer sobre esta prova. Uma é que ela é acessível. Necessita de explicação e meditação mas é intuitiva e auto-sustentável. Não depende de muitos axiomas, lemas, teoremas e regras de inferência. O segundo comentário importante é que este resultado não é nada óbvio. Necessita de alguns exemplos particulares para o tornar plausível e requer uma prova geral. Desta combinação do *não-óbvio* e da *acessibilidade* resulta o *maravilhoso*.

A palavra é escolhida cuidadosamente. Em 1994 na conferência ATM, Jonhston Anderson conduziu a discussão das sete maravilhas do mundo (matemático). A fórmula $F+V-A=2$ não foi enquadrada nesse grupo, mas foi mencionada. E pareceu claro que os critérios sugeridos para o *maravilhoso* estavam a ser usados. Por exemplo, o teorema da factorização única de inteiros para primos não foi um candidato: não parece necessitar de prova. É óbvio que se pode partir um inteiro de forma única, desta maneira, e que as provas usualmente oferecidas são menos convincentes do que a intuição. Por outro lado, a infinidade dos números primos *é* maravilhosa. Não é óbvio — de facto é de alguma forma contra-intuitivo — mas a prova é simples e acessível. Bem, quase acessível. O único entrave possível é a regra de inferência que permite a prova pela contradição: a prova é geralmente apresentada desta forma. Voltaremos a esta questão mais tarde.

Justificação e prova em micromundos computacionais

Em escolas secundárias o uso do Logo para produzir polígonos é uma tarefa familiar. Geralmente a "tartaruga" movimenta-se para a frente à volta do polígono, de forma a que o foco de atenção se situe no ângulo exterior de cada vértice. É muito simples constatar que estes se devem adicionar para obter uma volta completa. Como uma aproximação aos ângulos internos isto é de certa forma indirecto. Mostrar, por exemplo, que os ângulos de um triângulo equivalem a meia volta (ou seja a uma rotação de 180°) através deste método, é um pouco forjado, apesar de provavelmente ser mais acessível do que uma prova baseada em construções e propriedades de linhas paralelas que, na verdade, pertencem ao sistema euclidiano formal.

Claro que não há realmente uma causa para que as rotações não correspondam aos ângulos internos. Mas há algo na imagem da tartaruga que torna o sistema não natural. Para se tornear o triângulo através dos ângulos internos a pobre tartaruga tem de rastejar até ao primeiro vértice, seguidamente encostar-se ao ângulo interno antes de recuar pelo próximo lado. Por outro lado, esta brilhante experiência imaginária torna muito claro que a rotação total através dos três ângulos internos é uma meia volta.

Perspectivas semelhantes fornecem outras relações geométricas, tal como propriedades de ângulos alternos e correspondentes, muito óbvias. Um dos desafios do uso dos computadores na educação matemática é criar micromundos que tornem este óbvio acessível.

Não é surpreendente que um programa gráfico de computador gere uma forma particular de prova geométrica. Afinal, o seu propósito é explorar as propriedades da forma, e as características do micromundo específico encorajam certas forma de experiência imaginária. É um pouco mais difícil aplicar estas ideias a propriedades de números. Suponhamos, por exemplo, que queremos criar uma infinidade de números primos óbvia e acessível. Tal como é apresentado na maioria dos livros de texto a prova usual depende da redução ao absurdo. Um exercício útil é produzir uma prova construtiva. Em termos de computação queremos escrever um procedimento (talvez em Logo ou noutra linguagem de programação) que continue a gerar novos primos.

Claro, não é assim tão difícil conceber um programa que verifique os números através de divisões e que imprima uma lista de todos os primos ordenados conforme requerido. Mas isto comporta uma questão. Nós sabemos que os primos continuarão a surgir porque sabemos, de qualquer forma, que há uma infinidade deles. O que queremos é um procedimento recursivo que produza sempre e obviamente outros primos num número finito de passos.

Há imensas formas de resolver isto. Uma delas é reter o espírito da prova clássica por acumulação de uma lista de primos $p_1, ..., p_r$ e produzir o seguinte por cálculo $p_1 p_2 ... p_{r+1}$ e obter o seu menor factor primo por divisão. Se queremos iniciar esta sequência com 2, torna-se:

2, 3, 7, 43, 13, 53,...

(porque 13=1807:139 e 53=23479:443)

Começar com 3 (ou 7) não faz diferença:

3, 2, 7, 43, 13, 53, ...

7, 2, 3, 43, 13, 53, ...

Mas começar com cinco dá:

5, 2, 11, 3, 331, 19, ...

Estas sequências não contêm todos os primos (pelo menos eu não penso que contenham), mas são sequências infinitas de primos, em que cada novo termo é gerado num número finito de passos.

Como um algoritmo de computador que gera primos, este procedimento tem algumas desvantagens. No entanto, merece consideração e investigação. Sabemos que há um número infinito de primos devido a uma peça subtil de dialéctica: para os que apreciam tal lógica isto pode ser interessante, mas muitos aprendem-no simplesmente sem lhes dar nenhum uso. A actividade aqui sugerida é uma forma de se apropriar deste conhecimento e desenvolver formulações individuais alternativas da prova.

Pode ser útil tentar encontrar alguma metáfora ou imagística para entender a função do computador e do micromundo que ele fornece, ao fazer matemática e ao trabalhar na prova matemática.

Em certo sentido, um micromundo é um universo neo-platonista. É um lugar onde formas geométricas, números, e outras entidades matemáticas existem por direito e podem ser exploradas. No entanto, isto é um pouco pretensioso no tom: talvez a analogia do tabuleiro de xadrez seja melhor.

Por vezes é dito que a matemática formal é apenas um complicado jogo, como uma elaborada forma de xadrez. Os objectivos deste jogo são de variadas formas: por exemplo, os problemas são *resolvidos* e os teoremas são *provados*. Ser-se bom em matemática implica aprender a alcançar estes objectivos e reconhecer quando eles estão correctamente completos. Um micromundo é uma arena visualmente acessível e facilmente manipulável na qual o jogo se pode desenrolar.

A comparação com o xadrez surge mais ou menos assim. Imagine-se tentar explicar o xadrez sem tabuleiro ou peças. Uma numeração puramente formal é usada para explicar as jogadas, as regras são descritas em palavras e de alguma forma tem de se entender quando e como o jogo se completa. Até ao advento dos computadores esta foi a forma que utilizámos para fazer matemática. Agora, os computadores fornecem-nos o tabuleiro. Esta visão extrema não apelará a todas as pessoas. Mas é absolutamente surpreendente especular que as gerações futuras possam olhar para trás, assombradas com a matemática na fase pré-computador e em como este elaborado jogo foi desenvolvido sem o equipamento essencial.

Limitações dos micromundos

Por vezes, as fronteiras de um micromundo são óbvias de reconhecer. Noutras ocasiões pode levar algum tempo a reconhecer essas limitações. Nalguns casos não encontramos tantas limitações como anomalias: o micromundo demonstra ter a sua própria estrutura e propriedades que não são propriamente aquelas do sistema que esperávamos, ou que prtendíamos que representasse. Há uma ilustração curiosa acerca disto no aparecimento de objectos impossíveis e ambíguos no 3D Logo. Estas considerações levantam a questão de ser possível criar um micromundo computacional que forneça auto-sustentação, consistência e um sistema completo de representação do espaço ou número.

Qualquer *software* pode desafiar-nos a encontrar alguma aplicação que os autores não tenham previsto; e ficamos especialmente maravilhados quando algo estranho acontece. Por vezes, não é tanto o caso que o micromundo seja inadequado; antes, pode criar um sistema próprio totalmente novo. Isto é provavelmente mais óbvio em trabalho gráfico, mas também há ilustrações numéricas, especialmente quando o resultado de um procedimento é particularmente sensível a erros de arredondamento e ao grau de precisão da aritmética.

Claro que, em qualquer situação particular, os construtores inteligentes de *software* refinam a facilidade para que nós possamos modelar e investigar o comportamento exacto da estrutura. Depois teremos de descobrir outra coisa que se oponha ao sistema e teremos sempre a possibilidade de o fazer.

Provas geradas por computador

O aspecto mais inquietante do uso dos computadores em matemática não são as suas limitações e inadequações: de facto, seria consolador acreditar que nenhum micromundo pudesse revelar uma representação completa e auto-sustentada do número e da geometria. O que causa maior mal estar é a noção de que algumas provas matemáticas dependem inteiramente do uso dos computadores. A ilustração mais citada acerca disto é o teorema das quatro cores, mas há muitas verdades que sabemos apenas devido aos procedimentos do computador. Por exemplo:

$2^{21701} - 1$ é um primo

Provavelmente acreditará nisto. Mas também, não poderá ter a certeza de que algum ser humano tenha desenvolvido todos os cálculos necessários à sua confirmação. Se eu vos citar a data e lugar em que este resultado foi confirmado por computador, não o perturbará mas também não o surpreenderá. E esta é a questão. Nunca esperou que este resultado fosse maravilhoso. Eu poderia torná-lo maravilhoso se pudesse, numa experiência imaginária de uma ou duas linhas torná-lo óbvio. Então, talvez ficasse surpreendido e começasse a aplicar experiências imaginárias a mais alguns números grandes. Infelizmente não lhe posso oferecer essa oportunidade.

Voltemos ao teorema das quatro cores. É uma verdadeira desilusão. Queremos uma experiência imaginária inteligente, acessível, como a prova da forma dos poliedros de Euler. Ao invés, obtemos uma prova inacessível baseada em computador.

Os computadores têm uma enorme influência na acessibilidade da matemática. Proporcionam-nos um universo no qual explorar a matemática e tornar óbvia a veracidade das afirmações matemáticas se torna acessível para todos nós de uma forma individual. No entanto, também permitem aos matemáticos criar provas que não são (nem nunca podem ser) acessíveis a ninguém. Dado o uso contemporâneo universal dos computadores está claro que cada vez mais novos aspectos da matemática — novo conhecimento, se quiserem, ou novas verdades — serão geradas por computador. Vale a pena pensar que os novos métodos poderosos fornecidos pela abordagem formalista aos fundamentos da matemática no início do século vinte não geraram provas acessíveis. No trabalho de Whitehead e Russell a prova poderá consistir em páginas cheias de cadeias de símbolos cuidadosamente transformados através de regras de inferência. Poderemos ficar de alguma forma sossegados, porque alguém construiu uma estrutura básica da matemática deste modo. Mas o seu verdadeiro efeito no nosso entendimento é dificilmente mais significativo do que as modernas provas de computador.

Para aqueles que continuam a encontrar contentamento e entusiasmo no ensino e aprendizagem da matemática, a prova é uma importante parte do pacote. Precisamos de nos questionar porquê. Poderemos mencionar aspectos estéticos da prova, conhecimento ou elegância. Poderemos falar sobre construção de provas, convencendo-nos e aos outros e tornando nosso o conhecimento matemático. Estes assuntos têm muito pouco a ver com axiomas, regras de inferência e sistematização da matemática. Pelo contrário, a nossa preocupação está quase inteiramente situada nas experiências imaginárias.

O encantamento que encontramos nessas provas tem sobrevivido à absurda mão do formalismo e igualmente sobreviverá às pressões da era do computador. Alguns matemáticos produzirão provas geradas por computador de novos teoremas. Outros, no entanto, poderão usar os micromundos do computador para fornecer novas e acessíveis provas para velhos teoremas. Desta forma, os teoremas tornar-se-ão não apenas verdadeiros, mas também óbvios e maravilhosos.