Conjecturas e provas em Geometria
Uma nova visita à ilha do triângulo equilátero

Margarida Junqueira e Sérgio Valente

Neste artigo discutimos algumas ideias em torno da questão da produção de conjecturas e provas em Geometria. Mais concretamente, analisamos como é que este tipo de actividades pode ser levado às salas de aula e que papel têm aí os modernos ambientes computacionais que permitem fazer construções de figuras geométricas e explorá-las de forma dinâmica[1].

Dividimos o artigo em duas partes. Na primeira abordamos as questões num plano teórico, referindo, em particular, alguns resultados da investigação sobre a utilização de *software* geométrico em salas de aula internacionais e nacionais. Na segunda parte descrevemos uma actividade realizada num curso de formação de professores em que procurámos concretizar algumas das ideias que defendemos.

Explorar, conjecturar e provar em ambientes geométricos computacionais

Formular conjecturas e prová-las é uma das características centrais da actividade matemática e provavelmente a que melhor a distingue da actividade científica noutras disciplinas. Isso, entre outras razões, leva a defender a necessidade de confrontar todos os alunos, mesmo os que não pretendam ser matemáticos, com a natureza específica do raciocínio matemático.

Mas investigar, conjecturar e provar é algo que os alunos, e mesmo muitos professores, não apreciam e manifestam sérias dificuldades. A forma como, durante largos anos, se introduzia normalmente a demonstração foi responsável por esse estado de coisas. Por um lado exigia-se que os alunos reproduzissem demonstrações carregadas de um rigor e de um formalismo que o seu nível de desenvolvimento não permitia compreender. Por outro lado, acreditava-se que poderiam alcançar o que estava em causa numa demonstração se de início fossem confrontados com a prova de propriedades geométricas elementares, fáceis de visualizar. Isso teve o efeito perverso de fazer com que a grande maioria dos alunos nunca compreendesse o interesse nem a necessidade de mostrar a veracidade de "coisas que qualquer pessoa estava mesmo a ver que eram assim", mas que, por alguma absurda razão, os professores e os livros exigiam que se fizesse, escrevendo uma *hipótese*, uma *tese* e depois a *demonstração*, palavras, para eles, despidas de qualquer sentido.

O falhanço desses métodos, a par do ideal democrático de uma matemática para todos, conduziu a novas orientações na forma como os alunos devem ser iniciados neste tipo de actividade. Para isso contribuíram de forma decisiva os trabalhos de Dina e Pierre van Hiele, na Holanda, na década de cinquenta, sobre aprendizagem da Geometria e da demonstração em Geometria, amplamente divulgados e aprofundados, primeiro na União Soviética, depois nos Estados Unidos no início dos anos oitenta, e rapidamente espalhados um pouco por todo o mundo[2].

É assim que, actualmente, nos mais diversos países, as orientações curriculares propõem abordagens heurísticas para a exploração das propriedades geométricas. Através da construção, manipulação, observação e análise das figuras, podem ser intuídas conjecturas sobre as suas propriedades, colocando-se, em

Formular conjecturas e prová-las é uma das características centrais da actividade matemática e provavelmente a que melhor a distingue da actividade científica noutras disciplinas. Isso, entre outras razões, leva a defender a necessidade de confrontar todos os alunos, mesmo os que não pretendam ser matemáticos, com a natureza específica do raciocínio matemático.

seguida, o desafio de compreender porque é que essas propriedades se verificam e convencer outras pessoas sobre a sua validade.

Mas a explicação das propriedades geométricas deverá, sobretudo, constituir algo que tenha significado para os alunos. Estes devem ser desafiados de modo sistemático a justificar as suas afirmações, aceitando-se que comecem por dar justificações visuais, baseadas em raciocínios empíricos, pois isso é fundamental para atingirem níveis mais elevados de pensamento geométrico. Progressivamente, devem ser encorajados a refinar o seu pensamento e conduzidos a compreender as insuficiências das justificações visuais e empíricas, de modo a descobrirem e começarem a utilizar algumas das componentes críticas da prova formal matemática. Esse tipo de prova só será apropriada na medida em que os alunos a saibam utilizar como uma ferramenta significativa para justificarem as suas ideias[3].

Seguindo a tradição clássica, as construções geométricas são um meio poderoso de estudar as figuras. Muitas propriedades podem ser (re)descobertas através do método heurístico sistematizado por Schumann[4], que assenta na realização de construções geométricas e coloca como desafios perceber porque é que essas construções funcionam, isto é, representam uma determinada figura, e descobrir as suas propriedades.

1. Descoberta indutiva de teoremas através de construções gráficas.

- Resolução de um problema adequado de construção. Resultado: uma configuração geométrica[5].
- Análise do resultado da construção (também através da inclusão e destaque de elementos essenciais, obtidos através de medições e de cálculos baseados em medições). Resultado: uma primeira suposição.
- Realização de novas construções que tenham em consideração casos diferenciados e verificação da suposição nessas construções. Resultado: confirmação da suposição com a formulação de um primeiro teorema ou negação da suposição.

2. Descoberta e apresentação da prova.

- Necessidade da prova: motivação.
- Análise do problema: estabelecer as hipóteses e a tese.
- Aplicação de métodos heurísticos para descobrir provas (avançar da hipótese para a tese, trabalhar em sentido contrário, raciocinar por analogia com outras provas, etc.).
- Documentação da prova tendo em vista a sua compreensão.

3. Tratamento do teorema e da prova.

- Discussão e explicação da metodologia para descobrir teoremas e provas.
- Aplicação de métodos heurísticos, como especialização, generalização, comparação, inversão, para produzir novas afirmações.

A (re)descoberta de propriedades geométricas com recurso apenas às ferramentas clássicas tem três grandes inconvenientes: o tempo que se gasta na construção de um número suficientemente grande de exemplos relacionados com a propriedade; o tempo que se gasta na realização de medições e cálculos pouco precisos; as construções resultantes são estáticas e apenas podem ser tornadas flexíveis por meio da imaginação. Se a exploração das construções se fizer com recurso aos modernos ambientes computacionais geométricos ultrapassam-se estes inconvenientes. Realizando uma construção e observando as suas modificações, feitas em tempo real e segundo critérios do próprio utilizador, este pode perceber que características permanecem invariantes, quais as que se modificam, fazer experiências que lhe permitam compreender as causas das invariâncias, em suma, investigar as propriedades geométricas num permanente vai e vem entre indução e dedução.

A investigação[6] mostra que o trabalho de alunos que utilizam ambientes geométricos computacionais tem uma qualidade manifestamente superior à usual. Ultrapassam os conteúdos de Geometria habituais, reinventam definições, fazem conjecturas, colocam e resolvem problemas significativos e desenvolvem provas originais. A formulação de conjecturas nem sempre acontece facilmente e, por vezes, causa mesmo frustação, sobretudo na fase inicial em que constitui um tipo de actividade pouco familiar à grande maioria dos alunos. A força da evidência das imagens constitui um obstáculo à necessidade da feitura de uma prova para validar uma conjectura. Principalmente os alunos mais fracos formulam generalizações e consideram-nas automaticamente válidas com base nos poucos casos por eles experimentados, mas, a pouco e pouco, passam da elaboração de generalizações por testagem de casos particulares para a testagem de casos mais gerais. No final, muitos alunos fazem conjecturas e sentem a necessidade de as justificar. Alguns percebem que as propriedades por si descobertas necessitam de ser provadas antes de serem aceites como verdadeiras, ao contrário do que acontece com as enunciadas nos livros de texto.

Também estudos realizados em Portugal referem observações análogas. Num trabalho que envolveu alunos do 10º ano de escolaridade, sobre exploração de figuras geométricas em computador, formulação de conjecturas e respectiva prova, Manuel Saraiva[7] salienta o facto de alguns alunos conseguirem entender a importância da prova formal como meio de estabelecer a verdade matemática, principalmente no sentido de elucidar porque é que essa verdade acontece. Num trabalho que nós próprios realizámos no 9º ano de escolaridade[8], observámos que as justificações dos alunos sobre a validade dos seus processos de construção de figuras geométricas, evoluíram no sentido de substituírem argumentação visual e empírica por outra mais rigorosa, à medida que, sistematicamente, foram sendo desafiados a descrever e a explicar esses processos.

2. Uma conjectura e várias provas

através de uma nova visita à ilha do triângulo equilátero.

Num curso de formação de professores sobre utilização das tecnologias em Educação Matemática, que realizámos no centro *Proformar - Almada*, entre Outubro e Dezembro de 1996, uma das sessões de um módulo dedicado à Geometria tinha como título *Conjecturas e provas em geometria - uma investigação orientada sobre uma propriedade do triângulo equilátero*. Para essa sessão adaptámos um problema proposto há uns anos pelo Eduardo Veloso, no manual do Logo.Geometria, e que, em síntese, propõe a localização de uma *casa* numa *ilha* com a forma de triângulo equilátero, de modo que a soma das distâncias da *casa a cada uma das três praias que ladeiam a ilha* seja mínima.

Escolhemos este problema baseados nos seguintes motivos:

•a propriedade geométrica em causa não é evidente e é surpreendente;

•as capacidades dinâmicas do *software* que se estava a utilizar (Cabri-géomètre II) contribuem de forma decisiva para a sua redescoberta;

•é uma propriedade fácil de provar, sendo possível fazê-lo de diferentes modos e com diferentes níveis de rigor;

•as considerações anteriores fazem com que seja um bom problema para propôr também a alunos.

O problema foi investigado em três fases[9]. A primeira tinha como objectivo a modelação do problema através de uma construção geométrica adequada e a sua exploração com vista à formulação de conjecturas. Nas segunda e terceira fases propusemos duas provas diferentes da conjectura.

Na primeira actividade começámos por sugerir a realização de duas macro-construções[10], uma para obter um triângulo equilátero e outra para obter a distância de um ponto a uma recta definida por dois pontos (Ficha - 1.0). Com isto pretendíamos que os participantes obtivessem ferramentas facilitadoras do seu trabalho. Em seguida propusemos a construção de um triângulo equilátero (*a ilha*), a marcação de um ponto no seu interior (*a casa*) e a construção dos segmentos representativos da distância da *casa* (o ponto) *a cada uma das praias* (os lados do triângulo) (Ficha - 1.1). Passou-se depois a uma das etapas mais importantes, a exploração dinâmica do que é que acontece à soma das três distâncias (Ficha - 1.2). Deslocando aleatoriamente o ponto no interior do triângulo, à primeira vista não se percebe nada de muito significativo. No entanto, se forem testadas situações limite começa-se a ter alguma ideia do que se passa. Se o ponto estiver sobre um dos lados do triângulo (figura 1.2) uma das distâncias anula-se ficando apenas a somas das outras duas, e se se fizer coincidir o ponto com um dos vértices anulam-se duas distâncias e a terceira parece coincidir com a altura do triângulo (figura 1.3). Testando esta ideia relativamente a cada um dos vértices verifica-se que ela se mantém. Isto é, num caso extremo a soma das distâncias parece coincidir com a altura do triângulo. Será que isso é sempre assim?

O Cabri-géomètre II tem potencialidades que permitem levar mais longe a confirmação desta hipótese, e que pretendíamos ilustrar. Sugerimos assim que utilizando a calculadora do Cabri se afixasse no ecrã a soma das três distâncias e a altura do triângulo (Ficha - 1.3). Deslocando o ponto no interior ou sobre o triângulo era possível observar que a soma das distâncias permanecia constante e igual à altura do triângulo. Modificando o comprimento do lado do triângulo observava-se a mesma invariância. Sugerimos ainda a construção de uma tabela onde se registassem as medidas das três distâncias, a respectiva soma e a altura do triângulo (figura 2). Isso ajudou a confirmar que, para qualquer triângulo equilátero, a soma das três distâncias, considerando um ponto qualquer do triângulo ou do seu interior, era igual à sua altura, sendo portanto indiferente *o sítio onde o João deveria construir a sua casa*.

Este resultado, que no início nada faria prever, tornou-se uma conjectura muito plausível e, sobretudo, muito "visível".

Na segunda actividade propusemos uma prova desta conjectura, recorrendo às potencialidades do Cabri-géomètre II para fazer transformações geométricas. Sugerimos que traçando paralelas aos lados da *ilha* passando pela *casa*, se construíssem os três triângulos equiláteros representados na figura 3.1 e se transformassem esses triângulos noutros iguais, de modo a que as suas três alturas

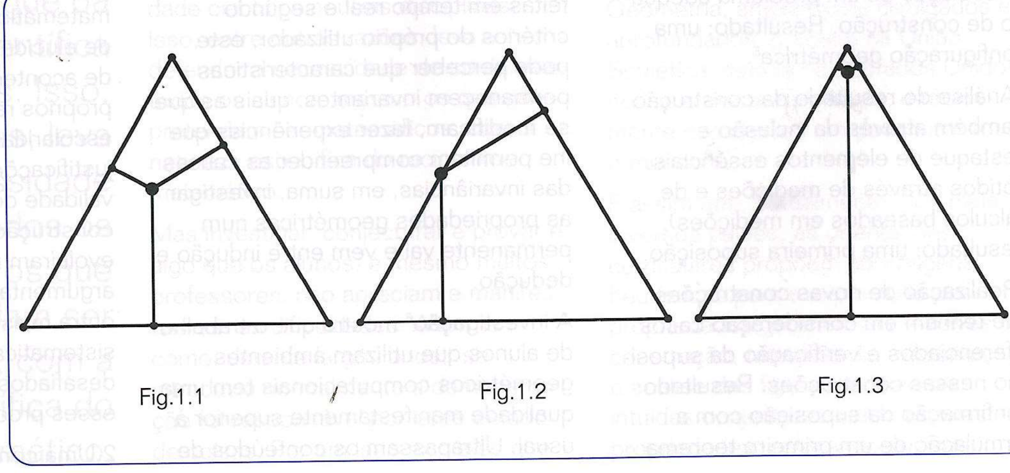

Fig.1.1 Fig.1.2 Fig.1.3

	d1	d2	d3	d1+d2+d3	altura
1	1,75	1,04	3,24	6,03	6,03
2	3,67	1,06	1,30	6,03	6,03
3	1,74	0,89	3,40	6,03	6,03
4	1,17	3,02	1,84	6,03	6,03
5	3,60	4,39	1,83	9,82	9,82
6	6,37	0,95	2,50	9,82	9,82
7	0,40	0,14	7,81	8,35	8,35
8	0,80	6,47	1,08	8,35	8,35
9	0,85	5,59	2,00	8,44	8,44
10	2,56	0,93	1,00	4,49	4,49
11	3,20	0,49	0,80	4,49	4,49

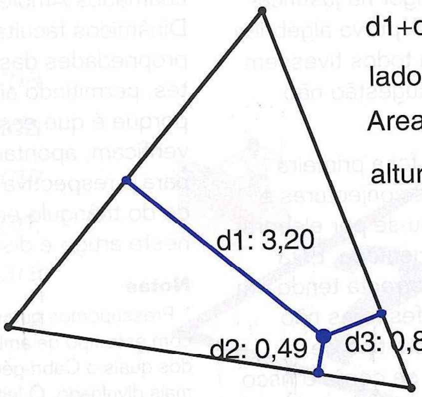

Fig. 2

ficassem sobre uma mesma recta. Foi então relativamente fácil mostrar que a soma dessas três alturas era igual à altura do triângulo inicial (figura 3.2).

Na terceira e última actividade propusemos outra demonstração da propriedade. Desta vez sugerimos a divisão da ilha em três triângulos a partir da casa, como mostra a figura 4, e que fosse tida em conta a fórmula da área de um triângulo.

A demostração, apresentada pelo Eduardo Veloso no manual do Logo.Geometria, usa técnicas algébricas:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\Leftrightarrow \frac{l \times h}{2} = \frac{l \times h_1}{2} + \frac{l \times h_2}{2} + \frac{l \times h_3}{2}$$

$$\Leftrightarrow h = h_1 + h_2 + h_3$$

(A=área; l=lado; h=altura)

Este problema suscitou a adesão dos participantes na sessão. Apenas uma professora conhecia a propriedade, os restantes (re)descobriram-na sem grande dificuldade, tendo feito notar que a visualização das três distâncias a "transformarem-se na altura do triângulo" foi determinante para a formulação da conjectura. A prova geométrica da conjectura foi relativamente difícil, sobretudo para os

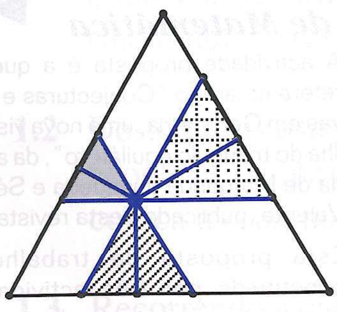

Fig. 3.1

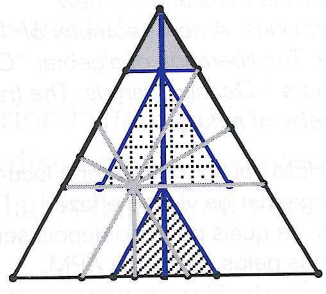

Fig. 3.2

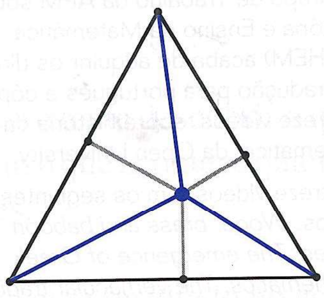

Fig. 4

professores menos experientes em Geometria. Apareceram diferentes provas, usando diferentes isometrias para transformar os triângulos, e com diferentes níveis de rigor na justificação das afirmações. A prova algébrica foi mais fácil, embora todos tivessem admitido que sem a sugestão não chegavam lá.

A actividade descrita foi a primeira dedicada ao tema das conjecturas e provas, por isso optou-se por elaborar uma ficha bastante orientada. Esta opção pareceu-nos correcta tendo em conta que muitos professores não estão habituados a este tipo de actividades, pelo que se corria o risco de ficarem desmotivados se o problema tivesse sido posto de uma forma mais aberta. Numa segunda sessão sobre a mesma temática propusemos a pesquisa de outras propriedades dos triângulos e dos quadriláteros de uma forma bastante menos orientada.

Conclusão

Algumas experiências de ensino e aprendizagem mostram que é possível desafiar os alunos a colocarem-se no papel de aprendizes matemáticos, explorando, fazendo as suas conjecturas e desenvolvendo provas significativas para si próprios e para os seus pares, no contexto em que estão inseridos, aprendendo, a pouco e pouco, as características e metodologias próprias da investigação e da prova em Matemática. A Geometria é um campo com muitas potencialidades nesta área, nomeadamente se o trabalho recorrer aos ambientes computacionais que permitem fazer construções de figuras geométricas e investigá-las de forma dinâmica. Os chamados Ambientes Geométricos Dinâmicos facultam intuições sobre propriedades das figuras nada evidentes, permitindo ainda compreeender porque é que essas propriedades se verificam, apontando assim caminhos para a respectiva prova. A propriedade do triângulo equilátero descrita neste artigo é disso um bom exemplo.

Notas:

[1] Pressupomos que o leitor está familiarizado com este tipo de ambientes computacionais, dos quais o Cabri-géomètre é, entre nós, o mais divulgado. O leitor que não os conheça, ou que esteja interessado em aprofundar o assunto, pode consultar os artigos de Ponte (1995) e Minga (1996) publicados na *Educação e Matemática*.

[2] Para aprofundar este tema ver Junqueira (1993) e Matos (1988).

[3] Um desenvolvimento destas noções pode ser visto em Battista e Clements (1995).

[4] Schumann é um investigador alemão colaborador do projecto Cabri-géomètre. Ver Schumann (1991).

[5] Seguindo uma linha defendida por autores franceses e alemães, Schumann (1991, p. 104) considera que «a rede de pontos, rectas, semi-rectas, segmentos de recta, ângulos em circunferências, arcos de circunferência, etc., e suas incidências deve ser entendida como uma configuração geométrica».

[6] Ver Battista e Clements (1995)

[7] Ver Saraiva (1992).

[8] Ver Junqueira (1996).

[9] Apresentamos em anexo a ficha na qual se fizeram algumas reformulações em relação à que foi proposta no curso.

[10] Uma macro-construção é uma nova construção geométrica que é possível acrescentar às construções que o Cabri-géomètre tem pré-definidas.

Referências

Batista, M., Clements, D. (1995). Geometry and Proof. Em *Mathematics Teacher (88-1)*, pp. 48-54.

Junqueira, M. (1993). Conjecturas e provas informais em geometria com recurso a ferramentas computacionais. Em *Quadrante (1-2)*, pp. 63-78.

Junqueira, M. (1996). Exploração de construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos. Em *Quadrante (5-1)*, pp. 61-108.

Laborde, J. M., Frank, B. (1996). Cabri-géomètre II. France: Societé Texas Instruments.

Matos, J. M. (1988). Um exemplo de didáctica da geometria. Em *Educação e Matemática (6)*, pp. 5-10.

Minga, V. (1996). A minha experiência com o Cabri. Em *Educação e Matemática (37)*, pp. 9-13.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática?. Em *Educação e Matemática (34)*, pp. 2-7.

Saraiva, M. (1992). *O Computador na aprendizagem da Geometria - uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade.* Tese apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Educação. Lisboa: Pólo do Projecto MINERVA do DE-FCUL.

Schumann, H. (1991). Interactive theorem finding through continous variation of geometric configuration. Em *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 10 (3)*, 81-105.

Veloso, E. (1989). *Logo.Geometria 3.0, Manual de Utilização.* Lisboa: Projecto MINERVA, DE-FCUL.

Margarida Junqueira
Esc. Sec. de S. João do Estoril
Sérgio Valente
Esc. Sec. Anselmo de Andrade

Tecnologias na educação matemática • Notícias breves

O Grupo de Trabalho da APM sobre História e Ensino da Matemática (GTHEM) acaba de adquirir os direitos de tradução para português e cópia de treze vídeos, sobre história da matemática, da Open University.

Os treze vídeos têm os seguintes títulos: *Wood, brass and baboon bones; The emergence of Greek mathematics; The vernacular tradition; Mersenne and the birth of modern geometry; The founding of the Royal Society; Newton and Leibniz: the birth of calculus; Paris and the new mathematics; A new geometry of space; The liberation of algebra; "Only 4 colours"; Deadly quarrels; The true geometry of nature.*

O GTHEM vai agora traduzir a locução, legendar os vídeos e fazer cópias, as quais poderão depois ser utilizadas pelos sócios da APM.

No ProfMat 97 existirá uma sala de projecção onde serão projectadas as cópias inglesas.

Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta é a que se refere no artigo "Conjecturas e provas em Geometria, uma nova visita à ilha do triângulo equilátero", da autoria de Margarida Junqueira e Sérgio Valente, publicado nesta revista.

Esta proposta de trabalho é constituida por três actividades investigativas em torno do mesmo problema, utilizando o programa *Cabri-Géomètre II*.