Modelação Matemática: o papel das tecnologias de informação

João Filipe Matos

Os computadores e as calculadoras tornam possível a visualização e a manipulação de objectos matemáticos de uma forma diferente daquela que fazemos com a tecnologia do papel e lápis. A tendência é que se torne viável trabalhar com problemas reais capazes de estimular o interesse dos alunos pela Matemática e pela sua aplicação.

Uma das implicações interessantes da introdução das tecnologias de informação (computadores e calculadoras) no ensino da Matemática diz respeito aos tópicos que se poderão tornar por um lado mais relevantes e por outro mais acessíveis no ensino básico e secundário. Os computadores e as calculadoras tornam possível a visualização e a manipulação de objectos matemáticos de uma forma diferente daquela que fazemos com a tecnologia do papel e lápis. A tendência é que se torne viável trabalhar com problemas reais capazes de estimular o interesse dos alunos pela Matemática e pela sua aplicação.

Os computadores e as calculadoras constituem um passo decisivo para trabalhar com os alunos uma Matemática mais *realista* na medida em que se reduzem os obstáculos que têm que ver directamente com o cálculo e com operações rotineiras. A utilização de dados obtidos por observação de fenómenos reais traz à actividade de resolução de problemas um novo ingrediente que tem que ver não apenas com aspectos de motivação mas sobretudo com o facto de serem percebidas relações entre a Matemática e o mundo em que vivemos.

Estes argumentos justificam a crescente necessidade de meios informáticos que devem ser colocados à disposição dos alunos. Neste contexto não só se tornam essenciais salas de aula equipadas com computadores actualizados, como se requerem laboratórios de Matemática que permitam criar um ambiente de aprendizagem estimulante.

O que têm os computadores e as calculadoras de especial?

A importância da flexibilidade representacional destes instrumentos reside em dois tipos de razões. Por um lado, diferentes representações de uma ideia complexa permitem salientar diferentes aspectos dessa mesma ideia e, dessa forma, favorecem vários tipos de análise. Por outro lado, é um facto que os alunos diferem na sua capacidade de compreender e utilizar certas representações. Desta forma, ao tornar disponíveis diferentes representações, com recurso ao computador e à calculadora, alargam-se as possibilidades de aprendizagem matemática em face de uma situação real. Os resultados da investigação que tem vindo a ser realizada em diversos países mostra que ao criar múltiplas representações matemáticas que se podem relacionar de uma forma dinâmica aumenta-se de forma crítica a possibilidade de compreensão de conceitos naturalmente abstractos (Mason e Davis, 1991). É importante ainda referir que a facilidade com que os computadores e calculadoras podem ser manipulados contribui para encorajar uma abordagem experimental e indutiva da Matemática, desenvolvendo a construção de generalizações a partir de múltiplas observações e criando subsequentemente a necessidade da demonstração matemática.

Que ferramentas computacionais usar na modelação matemática?

A escolha das ferramentas computacionais a utilizar na modelação matemática requer uma percepção clara das suas finalidades, capacidades e limitações, complexidade e acessibilidade, e requisitos em termos de equipamento. A estes critérios deve acrescentar-se a necessidade de adequação da ferramenta computacional à proposta pedagógica que se pretende implementar.

Existem diversas ferramentas com grandes potencialidades para o apoio a actividades de modelação matemática a nível do ensino básico e secundário[1]. Entre as que mais podem contribuir positivamente para a construção de modelos encontram-se as folhas de cálculo, os programas para ajustamento de curvas, programas de gráficos de funções e programas de manipulação simbólica. Além destes existem os programas concebidos especificamente para a actividade de modelação de que são exemplos o *PowerSim* e o *Modellus*.

Modelação qualitativa

Em geral a modelação reveste uma análise quantitativa das situações. A própria tendência para uma utilização cada vez mais frequente dos computadores tem conduzido ao rápido aparecimento de ferramentas computacionais que permitem lidar com modelos de vários modos resolvendo equações, invertendo matrizes, traçando gráficos, optimizando funções, realizando testes estatísticos, etc. Mas isto não significa que para desenvolver modelos matemáticos com auxílio de ferramentas computacionais seja necessário conhecer todas as informações de forma quantitativa.

Recentemente, assiste-se a uma extensão qualitativa das funções dos computadores em actividades de modelação. Algumas ferramentas computacionais permitem construir modelos matemáticos de situações reais sem necessidade de conhecer toda a Matemática formal que sustenta os modelos computacionais. É possível desta forma estudar um dado fenómeno através da introdução de informação de natureza qualitativa.

Por exemplo, a variação da temperatura de uma bica acabada de tirar pode ser modelada qualitativamente dado que há ideia de que haverá um arrefecimento, o que corresponderá a uma curva da temperatura que será descendente. É possível introduzir esta informação no computador de forma qualitativa (através da representação de um esboço do gráfico) cabendo ao computador a tarefa de calcular os pontos ou a função correspondente (fig.1).

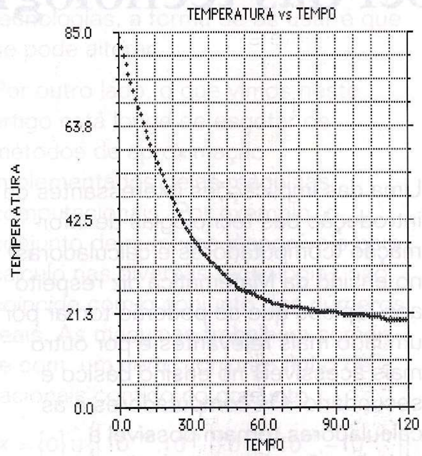

figura 1 - Gráfico, desenhado *à mão*, da variação da temperatura de uma bica usando o programa de modelação Stella

Esta informação acerca do arrefecimento da bica (ou melhor, da nossa ideia intuitiva do que será a variação da temperatura da bica ao longo do tempo) pode depois ser usada para analisar a influência de factores tais como a temperatura ambiente, o volume de café contido na chávena, etc. Naturalmente que a variação da temperatura representada desta forma pode ser comparada (quantitativamente), utilizando o computador, com valores reais captados através de um sensor de temperatura colocado na bica.

Abre-se desta forma uma variedade de utilizações de representações computacionais que valorizam a intuição acerca dos fenómenos e não colocam como elemento-chave e primeiro o conhecimento das funções que regem esses fenómenos.

O pacote de pipocas

Um exemplo interessante que ilustra o interesse de envolver a tecnologia na abordagem de problemas de modelação e aplicação da Matemática é a análise das dimensões ideais de um pacote de pipocas de forma cónica[2].

A construção de um pacote de pipocas a partir de um círculo de cartolina com um determinado raio R, pode ser feita através do corte de uma secção com um determinado ângulo α unindo as duas extremidades do sector circular resultante do corte (fig.2).

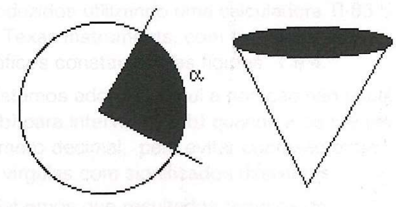

figura 2- Esquema da construção de um pacote de pipocas a partir de um círculo de raio R

A questão fundamental que se pode colocar é encontrar o valor do ângulo α que torna máximo o volume do cone assim construido.

Mas pode haver outros critérios na análise do ângulo de corte α. Podíamos estar mais interessados em encontrar o pacote mais económico ou aquele que ergonomicamente é mais interessante, etc.

Alguma Matemática básica ajuda a elaborar o modelo que nos permitirá responder à questão que formulámos. O volume do cone é dado por:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \times A_{base} \times altura$$

Queremos saber como se relaciona o valor do volume com o ângulo a (em graus) e como facilmente encontramos a expressão

$$A_{base} = \pi \times \frac{(360 - \alpha)^2}{360^2} \times R^2$$

a altura do cone virá (com a ajuda do Teorema de Pitágoras)

$$altura = \sqrt{R^2 - R^2 \left(\frac{360 - \alpha}{360}\right)^2}$$

Se considerarmos por exemplo o valor do raio R = 15 cm (o que parece ser razoável atendendo às dimensões de uma folha de cartolina) podemos recorrer a uma folha de cálculo introduzindo as expressões em

ângulo	área da base	altura	volume
30	593,66	5,99	1186,28
31	590,06	6,09	1197,72
32	586,48	6,18	1208,62
33	582,91	6,27	1219,01
34	579,35	6,36	1228,89
...	...	...	...
62	484,11	8,42	1358,05
63	480,86	8,48	1358,75
64	477,63	8,54	1359,25
65	474,41	8,60	1359,55
66	471,20	8,66	1359,66
67	468,00	8,72	1359,58
68	464,81	8,77	1359,31
69	461,63	8,83	1358,86
...	...	...	...

figura 3 - Tabela, na folha de cálculo, que mostra o volume do saco de pipocas para diferentes ângulos de corte

colunas sucessivas de forma a podermos relacionar o volume com o ângulo de corte. Vamos para isso considerar, por exemplo, que o ângulo de corte varia entre 30 e 70 graus (fig.3).

De imediato podemos obter o gráfico da variação do volume com o ângulo (fig.4). E a análise da tabela mostra

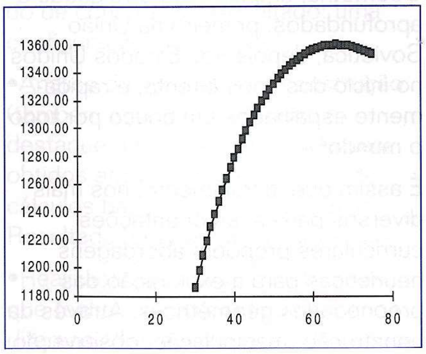

figura 4 - Gráfico da variação do volume com o ângulo de corte

que o valor máximo do volume do pacote de pipocas seria obtido com um corte de cerca de 66 graus. Obviamente que podemos trabalhar analiticamente esta situação e usar os instrumentos matemáticos adequados.

A folha de cálculo tem aqui um papel de natureza heurística na medida em que aponta soluções (cuja demonstração necessita de trabalho matemático com papel e lápis) e permite abordar o problema desvendando (por exemplo através dos gráficos) as relações entre as variáveis presentes.

Concluído que está que o valor 66 graus no corte da cartolina torna máximo o volume, poderá ser interessante analisar a forma como o volume varia com o raio do círculo cortado, mantendo um ângulo de corte de 66 graus (fig.5). Também aqui a folha de cálculo serve como ferramenta adequada para se perceber esta variação.

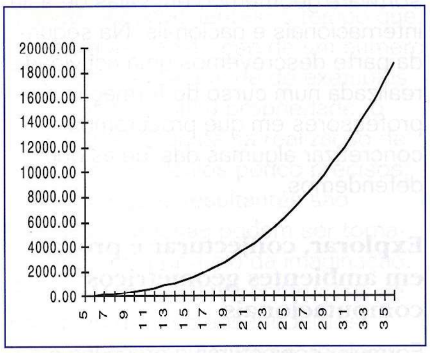

figura 5 - Gráfico da variação do volume com o raio do círculo, fixando o ângulo de corte em 66 graus.

É curioso notar que se aumentar o raio do círculo de cartolina de 15 para 20 cm o volume do cone de pipocas aumenta para mais do dobro!

Por outro lado é interessante verificar que com um cone de raio 37 cm podemos ter 20 litros de pipocas, isto é, cerca de 2500 pipocas!!!

E certamente podíamos continuar a exploração da situação atendendo por exemplo à conjugação das condições que impusemos com a necessidade de optimizar a utilização da folha de cartolina.

A concluir

É importante não esquecer que a utilização de ferramentas computacionais na educação matemática visa objectivos que se enquadram em propostas pedagógicas inspiradas na ideia de que os computadores devem constituir *adquiridos culturais* e esta perspectiva implica colocar os computadores ao serviço de *ideias poderosas* (Papert, 1980) em vez de centrar a atenção nos aspectos técnicos associados ao computador.

Esta argumentação ganha ainda mais força quando se pensa na actividade de modelação e aplicação da Matemática.

Não é relevante avaliar a potência e a capacidade do modelo matemático desenvolvido senão face à situação problemática que se pretende abordar e isto significa que "é na relação entre os objectivos que nos propomos atingir e os resultados que o modelo nos permite formular, que se encontra o terreno em que faz sentido falar da adequação da ferramenta computacional utilizada"[3].

Notas

[1]Ver por exemplo Ferramentas Computacionais na Modelação Matemática, Matos, Carreira, Santos e Amorim, 1994

[2]Este exemplo encontra-se explorado de forma mais completa em Matos, Carreira, Santos e Amorim, 1995

[3] Matos, Carreira, Santos e Amorim, 1994 (p. 54).

Referências

Mason, J. e Davis, J. (1991). Modeling with Mathematics in Primary and Secondary Schools. Geelong: Deakin University Press.

Matos, J., Carreira, S., Santos, M. e Amorim, I. (1994). Ferramentas Computacionais na Modelação Matemática. Lisboa: Projecto MEM, Faculdade de Ciências de Lisboa.

Matos, J., Carreira, S., Santos, M. e Amorim, I. (1995). Modelação Matemática. Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. e Carreira, S. (1996). Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Papert, S. (1980/1984). Logo, crianças e computadores. São Paulo: Editora Brasiliense.

João Filipe Matos
Faculdade de Ciências de Lisboa