Gráficos de funções em calculadoras e com lápis e papel

Gilda de La Rocque Palis

Nem sempre podemos obter um gráfico "completo" de uma função no sentido de apresentar numa só figura ao mesmo tempo o seu comportamento global e as suas características locais. O mesmo ocorreria se ao desenharmos gráficos à mão numa folha de papel respeitássemos as escalas. No entanto, com lápis e papel, ou no quadro negro, procuramos, em geral, esboçar um gráfico "completo", mesmo que para isso seja preciso distorcer as escalas empregadas, sem considerar os eixos graduados

A difusão de calculadoras gráficas tem levado professores e pesquisadores a reflectir sobre o papel dessas tecnologias no ensino-aprendizagem de funções. Estas ferramentas produzem em pouquíssimo tempo gráficos de funções difíceis e aborrecidos de desenhar à mão. Permitem assim uma ampliação importante do universo de funções tratadas, tanto em quantidade como em complexidade, já que ficam eliminadas dificuldades de cálculo e desenho presentes no traçado manual.

Além disso, como vem sendo cada vez mais enfatizado, as novas tecnologias computacionais facilitam a incorporação mais abrangente de pontos de vista importantes como o gráfico e o numérico ao estudo algébrico de diversos conceitos e processos, em particular nas funções. Segundo vários autores, a representação de objectos matemáticos em contextos complementares pode favorecer o processo de construção do conhecimento desses objectos.

Algumas pesquisas têm apontado dificuldades na utilização dessas tecnologias pelos alunos. Uma dessas dificuldades está relacionada com a ausência de informações sobre algumas características básicas dos procedimentos utilizados pelas calculadoras para produzir gráficos. Em geral, os manuais que acompanham essas tecnologias não são muito esclarecedores em relação a este aspecto.

Ao iniciar experiências com ferramentas gráficas computacionais, o utilizador pode então ficar surpreendido com alguns resultados gerados pelas máquinas que em nada se parecem com o que esperava obter como gráfico da função em questão.

Neste artigo pretendemos descrever como as actuais calculadoras gráficas, em geral, produzem gráficos de funções $f: D \subset \Re \rightarrow \Re$. Pretendemos, além disso, apontar algumas diferenças e semelhanças entre os processos empregados e os resultados obtidos ao utilizar essas máquinas e quando se usa lápis e papel.

Inicialmente para fixar a terminologia empregada recordemos que o gráfico de uma função $f=f(x)$ é o conjunto de pontos $(x, f(x))$, com x pertencente ao domínio de f. Fixado um sistema de coordenadas rectangulares, um esboço geométrico do gráfico de f é um desenho desse conjunto de pontos.

Para não sobrecarregar o texto, a expressão "um gráfico de f" será empregada, daqui em diante, com o significado de "um esboço geométrico do gráfico de f" e não de "o conjunto de pares $(x, f(x))$".[1]

Assim, um gráfico da função $f(x) = x^3 - x$ encontra-se esboçado na figura1.

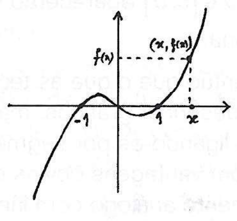


figura 1

De facto, o que vemos é "uma parte" do gráfico de f, já que o gráfico dessa função, definida para todo x real, se estenderia para a esquerda e para a direita indefinidamente.[2] Quando desenhamos gráficos de funções definidas em , com computadores ou calculadoras, também obtemos "partes" do gráfico da função estudada. Só que nesses ambientes computacionais este facto fica mais explícito, bem como a característica intrinsecamente "inexacta" das representações gráficas de funções, devido às variadas aproximações realizadas.

Como as calculadoras produzem gráficos

Vejamos como as calculadoras, em geral, produzem um gráfico de uma função dada por uma fórmula.

Inicialmente são fornecidos à calculadora a expressão da função e quatro números a, b, c e d satisfazendo a<b e c<d. Estes números caracterizam o rectângulo [a,b]x[c,d] denominado "rectângulo de visualização".

As coordenadas dos quatro vértices da região [a,b]x[c,d] do plano cartesiano $\Re^2$ são atribuídas aos vértices do ecrã da calculadora. Isso, por sua vez, determina as unidades das escalas, nos eixos horizontal e vertical. O gráfico de *f* é gerado da seguinte forma: a calculadora determina os valores dessa função num certo conjunto de números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde $a=x_0<x_1<x_2<\ldots x_n = b$ e "marca" no ecrã os pontos $(x_i, f(x_i))$, ligando-os sucessivamente para *i* crescente, por segmentos de recta.[3]

Várias calculadoras oferecem ao utilizador a opção de "marcar" esses pontos sem os ligar. De qualquer forma somente os pontos $(x_i, f(x_i))$ com $f(x_i) \in [c,d]$ aparecerão no ecrã da máquina.

Vemos então que o que as tecnologias fazem é desenhar gráficos, marcando pontos e ligando-os por segmentos de recta. Com vantagens óbvias sobre o procedimento análogo com lápis e papel: não é necessário fazer os cálculos nem o desenho, o número de pontos utilizado pode ser "grande" e o resultado é obtido quase instantaneamente.

Mas, assim como nem sempre se obtém um bom gráfico à mão por esse processo, também nem sempre se obtém um bom gráfico de uma função utilizando recursos computacionais. Aqui, a expressão "um bom gráfico de uma função *f*" significa que nele se pode visualizar o comportamento global e/ou local de *f*, dependendo do que se deseja que o gráfico mostre ou do que se pretende com ele realizar. É bom lembrar também que o gráfico adequado à resolução de um certo problema depende do próprio problema.

A escolha do rectângulo de visualização

Na figura 2 estão desenhados[4] três gráficos da mesma função *f(x)=sen(x)* em diferentes rectângulos de visualização.[5]

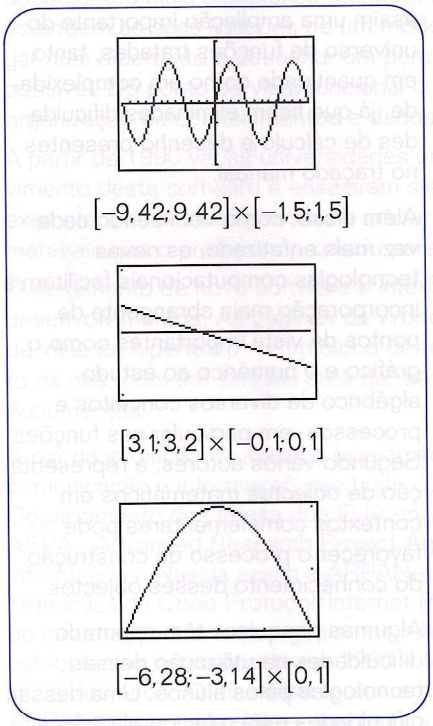


figura 2

Vemos que os gráficos obtidos dependem fortemente do rectângulo de visualização escolhido. São todos parciais, o que já era de se esperar, tratando-se de uma função definida para todo *x* real. Podemos considerar o primeiro gráfico como representativo do comportamento global da função, sendo este um desenho que apresenta um "resumo" das propriedades dessa função numa só figura. Os outros dois gráficos apresentam comportamentos locais da mesma função.

A escolha do rectângulo de visualização é uma etapa importante quando se quer estudar o comportamento de uma função examinando gráficos gerados no computador.

Vejamos um outro exemplo. A figura 3 apresenta dois gráficos da função

$$f(x) = \frac{2x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - x + 50}$$

Sabemos que esta função tem no máximo quatro zeros. No entanto no primeiro gráfico ela parece apresentar uma infinidade de zeros.

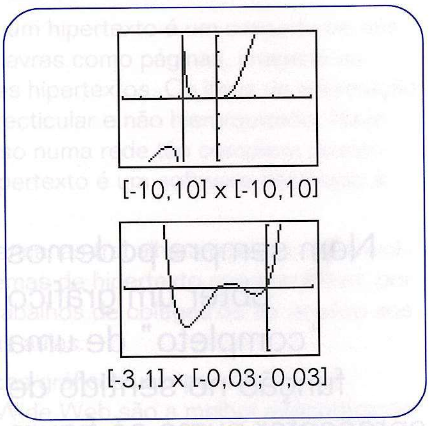


figura 3

É verdade que a escolha do rectângulo de visualização, ou seja das escalas, precisa ter em conta o intervalo de variação da função para que o gráfico que se deseja esboçar caiba no ecrã, assim como as suas características (intervalos de crescimento e decrescimento, intersecções com os eixos, etc.) para que a figura seja representativa. Mas, às vezes, essas condições são inconciliáveis.

No segundo gráfico da mesma função, podem-se visualizar os seus quatro zeros. Mas o ramo infinito do gráfico da função, que se encontra à esquerda da sua assímptota, desapareceu. Para que o ramo infinito também pudesse ser visualizado seria preciso empregar um desenho de dimensões aproximadamente 280 vezes maior.

De facto nem sempre podemos obter um gráfico "completo" de uma função no sentido de apresentar numa só figura ao mesmo tempo o seu comportamento global e as suas características locais. O mesmo ocorreria se ao desenharmos gráficos à mão numa folha de papel (de dimensões pré-fixadas) respeitássemos as escalas. No entanto, com lápis e papel, ou no quadro negro, procuramos, em geral, esboçar um gráfico "completo", mesmo que para isso seja preciso distorcer as escalas empregadas, sem considerar os eixos graduados. Por exemplo, na sala de aula, certamente desenharíamos um gráfico qualitativo dessa função como o da figura 4.

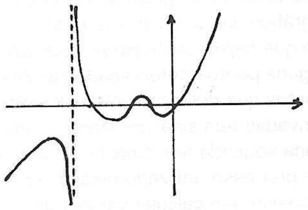


figura 4

Essa flexibilidade "manual", aproveitada no ensino tradicional, está totalmente ausente nas ferramentas computacionais nas quais as escalas são sempre respeitadas. Nesse caso podem ser necessárias várias figuras, em rectângulos de visualização diferentes, e uma síntese das informações obtidas nos diversos desenhos, para se poder conhecer o comportamento de uma dada função.

Consideremos mais um exemplo. Na figura 5 está desenhado um gráfico $f(x) = cos(23\pi x)$ no rectângulo $[-2\pi, 2\pi] \times [-1, 1]$. Podemos ver que esse gráfico não representa o comportamento dessa função nesse intervalo.

Para compreender a aparente "infinidade" de zeros visualizados na figura 3 e o gráfico incorrecto da figura 5 (valores máximos locais diferentes de 1, etc.), examinemos com um pouco mais de detalhe algumas características do ecrã de uma calculadora e

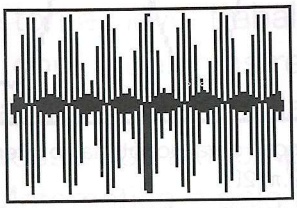


figura 5

como um ponto $(x_i, f(x_i))$ do gráfico de uma função f é aí "marcado".

Como os pontos são marcados no ecrã das calculadoras

O ecrã de uma calculadora (ou computador) apresenta propriedades bastante diferentes do rectângulo $[a,b] \times [c,d]$ do plano cartesiano $\Re^2$.

Um ecrã de calculadora é um rectângulo formado por minúsculos rectângulos, como se fosse um tabuleiro de xadrez. Esses rectângulos (pontos de luz) são chamados de "pixels". Cada um desses pixels pode estar em dois estados: aceso ou apagado. "Marcar" um ponto no ecrã da máquina significa acender um pixel.

Há diferenças importantes entre o ecrã de uma máquina e o rectângulo $[a,b] \times [c,d]$ do plano cartesiano. Este último contém uma infinidade de pontos e entre dois quaisquer de seus pontos há também uma infinidade de pontos. Já o ecrã tem um número finito de pixels e entre dois pixels contíguos não há nada.

O ecrã da calculadora TI-82 da Texas Instruments, por exemplo, utiliza 95 pixels na direcção horizontal e 63 na direcção vertical. As coordenadas de cada pixel são dadas pela linha e coluna nas quais este se encontra. Assim o pixel marcado na figura 6 corresponde ao par de coordenadas (3,60) nessa calculadora.

Como dissemos anteriormente, para obter o gráfico de uma função f é preciso fornecer à calculadora a sua expressão algébrica e o rectângulo de visualização $[a,b] \times [c,d]$. O gráfico de f é desenhado a partir da "marcação" de n pontos $(x_i, f(x_i))$, $0 \le i \le n$.

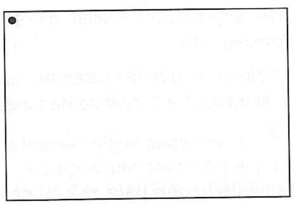


figura 6

As diversas calculadoras empregam quantidades distintas de pontos para desenhar gráficos. No caso da TI-82 são utilizados 95 pontos, $(x_i, f(x_i))$, $0 \le i \le 94$ sendo $x_i = a + i\Delta x$ e $\Delta x = \dfrac{b-a}{94}$.

A TI-92 oferece dez opções empregando um máximo de 238 pontos.

Na figura 7 é apresentado o gráfico de $f(x) = sen(2x)$ no rectângulo $[-10, 10] \times [-1, 1]$.

Esta figura não é um bom gráfico dessa função no intervalo; "a pequena" quantidade de pontos utilizada determinou um gráfico incorrecto.

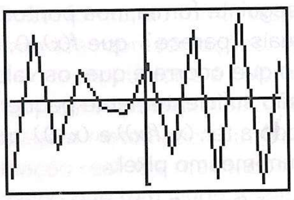


figura 7

Mas observe que utilizar "poucos" ou "muitos" pontos tem um sentido relativo; se estivéssemos a desenhar o gráfico de uma função afim é claro que dois pontos seriam suficientes.[6] De qualquer forma, poderíamos pensar que quanto maior o número de pontos tanto melhor o gráfico obtido. No entanto as características do ecrã gráfico delimitam o maior número de pontos com os quais a tecnologia, de facto, pode trabalhar e que corresponde ao número de pixels na direcção horizontal.

Vejamos agora como um ponto $(x, f(x))$ do gráfico de uma função f é marcado no ecrã de uma calculadora.

No caso da TI-82[7], um ponto (x, y) é "marcado" no pixel (i, j) cujas coordenadas satisfazem as relações:

$$i = Int\left(94\frac{x-a}{b-a} + 0{,}5\right)$$

$$j = Int\left(62\frac{y-c}{d-c} + 0{,}5\right)$$

onde $Int(x)$ significa o maior inteiro menor ou igual a x.

O que caracteriza esse mapeamento é o número de pixels em cada direcção e o rectângulo de visualização [a,b] x [c,d]. A menos de detalhes que não são importantes aqui, podemos dizer que todos os pares ordenados de números reais pertencentes aos rectângulos

$$\left[x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right] \times \left[y_j - \frac{\Delta y}{2}, y_j + \frac{\Delta y}{2}\right]$$

onde $x_i = a + i\Delta x$, $y_j = c + j\Delta y$, $\Delta x = \dfrac{b-a}{94}$ e $\Delta y = \dfrac{d-c}{62}$ são "marcados" num mesmo pixel *(i, j)*. Ou seja, são idênticos para a calculadora.[8]

Estes aspectos reflectem-se na figura 5 da seguinte forma: nos pontos *x* nos quais "parece" que *f(x)*=0, de facto o que ocorre é que os valores |*f(x)*| são suficientemente pequenos de modo a ter *(x, f(x))* e *(x, 0)* marcados num mesmo pixel.

Quanto à figura 8, observe que se trata de uma função com um período de aproximadamente 0,087. Seria necessário então que a diferença Δx entre as abcissas de dois pontos consecutivos marcados no ecrã fosse bem inferior a 0,087. No entanto o intervalo [-2π,2π] determina um valor para Δx de aproximadamente 0,133684 na TI-82. Logo é impossível obter um bom gráfico desta função no intervalo [-2π,2π] com esta calculadora.

A precisão de um desenho obtido em computador vai depender então do tamanho dos pixels (ou da sua quantidade, denominada "resolução" do ecrã), da mesma forma que gráficos desenhados à mão têm a sua precisão limitada pela tecnologia usada, no caso, a espessura da ponta do lápis.

Resumindo, com ferramentas computacionais, só é possível obter como esboço do gráfico de uma função o que estas são capazes de realizar, não mais do que isso.

O uso eficiente de programas computacionais na resolução de problemas envolvendo tratamento de funções requer conhecimentos conceptuais presentes no ensino-aprendizagem tradicional. É preciso salientar que os instrumentos de Cálculo e Análise utilizados no estudo de funções não são "superados" pelas diversas tecnologias, a forma de os usar é que se pode alterar.

Por outro lado, o que vimos neste artigo está longe de esgotar os métodos de aproximação implementados pelas máquinas computacionais. Por exemplo, o conjunto de números disponíveis para cálculo nas diversas tecnologias não coincide com o conjunto dos números reais. As máquinas trabalham somente com um certo conjunto finito de racionais contido no conjunto

$$X = \{0\} \cup \left\{\left[10^{-m}, 10^{m}\right]\right\} \cup \left\{\left[-10^{m}, -10^{-m}\right]\right\}$$

onde *m* é um inteiro positivo cujo valor depende da tecnologia.

Além da impossibilidade de representar todos os números, que são então geralmente arredondados por algum processo para a quantidade de dígitos com a qual a máquina trabalha, as diversas funções pré-programadas são calculadas por algoritmos que fornecem aproximações dos seus valores.

Finalmente, nem sempre é possível obter um bom gráfico de uma função, à mão ou à máquina, independentemente da escolha do rectângulo de visualização ou quantidade de pixels (espessura da ponta do lápis). Como exemplo, considere a tarefa de desenhar um bom gráfico da função *f* tal que *f(x)=1* se x é racional e *f(x)*=0 se x é irracional; ou da função *g* dada por *g(x) = x sen(1/x)* em [-1,1].

Notas

[1] Este último é univocamente determinado pela função, enquanto que um esboço geométrico é uma figura que pretende representá-lo e que depende da escolha de eixos e das respectivas escalas, da restrição de seu domínio, etc.

[2] Tradicionalmente, quando dizemos que o desenho da figura 1 é o gráfico da função $f(x) = x^3 - x$ estamos implicitamente afirmando que nenhuma mudança de comportamento ocorre para *x*>2 ou para *x*<-2. No sentido de que, por exemplo, para *x*>2 a função é crescente e sua concavidade não muda. Se houvesse mudanças nessas características de comportamento estas deveriam constar do gráfico apresentado.

[3] Estes segmentos de recta são horizontais, verticais ou diagonais a 45 graus. Isto devido às características de "tabuleiro de xadrez" do ecrã da calculadora, como veremos adiante.

[4] Todos os gráficos desse texto foram produzidos utilizando uma calculadora TI-83 da Texas Instruments, com excepção dos gráficos constantes das figuras 1 e 4.

[5] Estamos adotando aqui a notação não usual (a;b) para intervalos (a,b) quando a ou b é um número decimal, para evitar confusão entre as vírgulas com significados diferentes

[6] Sabemos que resultados teóricos de Cálculo Diferencial permitem esboçar um bom gráfico de uma variedade de funções desde que sejam conhecidos seus valores em alguns pontos determinados analiticamente (pontos que delimitam intervalos nos quais as derivadas têm sinal constante, nos quais a derivada segunda tem sinal constante, etc.). Mas o processo utilizado pelas máquinas e que consiste em calcular valores da função *f* em questão e "marcar" na tela os pontos $(x_i, f(x_i)), 0 \le i \le n$, ligando-os sucessivamente para *i* crescente, não leva em conta esses resultados.

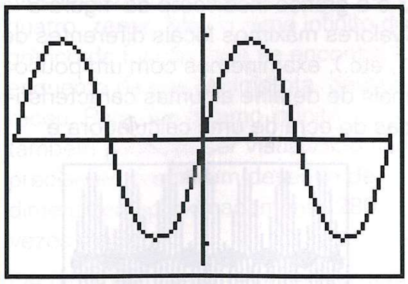
[7] Procedimentos análogos são implementados por outros modelos e marcas.

[8] Podemos pensar nos números Δx e Δy como sendo as medidas de um pixel com as escalas determinadas pelo rectângulo de visualização escolhido.

Gilda de La Rocque Pallis
Departamento de Matemática
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

As aparências iludem!

Esta é uma representação gráfica da função *y=senx+0.05sen(50x)*, numa TI-83, no rectângulo de visualização [-2π, 2π]x[-1.2, 1.2].



A função será monótona no intervalo]-π/2,π/2[?

Experimenta e discute.