

## Matemática experimental

José Sousa Ramos

Um matemático, como um pintor, um poeta ou um músico é um construtor de ideias, formas, cores, palavras e sons. O critério fundamental é a beleza. A capacidade mais determinante é a sensibilidade e a capacidade de observação. Todo o processo criativo passa por uma atitude inicial de observação e experimentação. Não será verdade também na aprendizagem?

Um matemático, como um pintor, um poeta ou um músico é um construtor de ideias, formas, cores, palavras e sons. O critério fundamental é a beleza. A capacidade mais determinante é a sensibilidade e a capacidade de observação. Todo o processo criativo passa por uma atitude inicial de observação e experimentação. Não será verdade também na aprendizagem?

Não se deve confundir atitude experimental com o uso de uma calculadora ou de um computador, assim como não se deve confundir um projecto de Laboratório de Matemática como um meio de aquisição de material informático. Mas também não se pode deixar de criticar aqueles que perante as inovações tecnológicas, sejam elas calculadoras, computadores ou Internet, assustadamente lhes apontam apenas os perigos e fazem afirmações gratuitas sobre os seus malefícios no ensino. Como se algum mal pudesse advir do seu uso ou, como se a próxima geração, pudesse colocar questões desse tipo. O ensino não está doente, apenas nunca se ensinou a tanta gente (a democratização do ensino é coisa recente) e nunca se exigiu tanto dos jovens (certos alunos de mestrado fazem hoje mais do que antigos professores fizeram em toda a sua vida). Mas atenção, nem tudo tem a mesma qualidade. Coloquemos primeiro algumas questões. Há que saber o que é a Matemática Experimental e a sua oportunidade actual.

### A Sociedade da Informação — novas questões

A transição da Sociedade Industrial para a Sociedade da Informação, que é agora uma realidade consciencializada por todos, põe questões interessantes:

- Que Ciência vamos ter no próximo século? Quais as ideias, os conceitos fundamentais, os métodos, as técnicas que promoverão o desenvolvimento científico futuro? Qualquer professor deve reflectir e estar atento aos sinais que apontam para próximos progressos.
- Que formação dar aos jovens na nova Sociedade da Informação?
- Assim como as fontes, transformações e conversões da energia levaram à tecnologia que criou a Sociedade Industrial, as fontes, os processadores e os transmissores de informação/entropia levam a tecnologias que estão criando a Sociedade da Informação. Quais serão as suas características próprias, as suas ideologias, as suas relações de produção e organização?
- A nova Teoria da Informação confunde-se com a Teoria da Complexidade, com a própria ciência interdisciplinar. Os problemas ligados à complexidade surgem por todo lado: o que é a complexidade, como caracterizá-la, como medi-la? Que tipos de complexidade os sistemas, as evoluções, as formas podem apresentar?
- Quais as leis que regem os fluxos da informação? Os novos aparelhos, na maioria baseados nas tecnologias digitais, são cada vez mais processadores de informação (por exemplo, computadores, multimédia, suportes de comunicações). Mas os paradigmas científicos e tecnológicos seguem de perto os esquemas das velhas máquinas de energia. A ciência da informação ainda não começou.
- Qual o papel da Matemática dentro da ciência da complexidade? A Matemática é cada vez mais fundamental, e o professor de Matemática precisa de o saber, de o sentir, de o

utilizar para motivar os alunos e a sociedade.

- Qual o lugar da Teoria do Caos e da Geometria Fractal na Ciência da Complexidade? Será uma simples moda passageira como alguns apregoam? Ou será que as medidas da complexidade dos sistemas caóticos e dos fractais, serão as grandezas básicas cujas relações exprimirão as leis, as dinâmicas dos fluxos de informação que traduzirão as propriedades do genoma humano, a gestão da Aldeia Global, o modo de pensar do robot inteligente, etc.? A inteligência, a criatividade, a capacidade de tomar boas decisões e realizar grandes obras é ainda uma incógnita do conhecimento psicológico, mas a necessidade da sua implementação artificial, nas máquinas inteligentes, promoverá a sua compreensão e o conhecimento de nós próprios. Serão elementos indispensáveis no ensino do futuro.

- Finalmente a questão que nos trouxe aqui — a Matemática Experimental. O rigor matemático, as ideias matemáticas, a criatividade e o poder dedutivo da matemática colocam hoje os limites do conhecimento: o que é decidível e o que não é, o que pode ser computável e o que nunca poderá sê-lo. Serão essas questões assim como todo o trabalho matemático um puro jogo do espírito humano, supondo que sabemos o que isso seja? Ou será antes fruto de uma apurada sensibilidade, de uma grande capacidade de observação e experimentação?

- As novas condições de trabalho: o computador e a rede Internet, permitem hoje, e de ano para ano sempre mais, trabalhar e comunicar em condições nunca antes imagináveis, o que leva necessariamente a uma renovação do método experimental da matemática. Os modos de ensinar terão também de se renovar.

### **O computador e a Internet no ensino e na investigação**

Não vou prolongar-me a falar das razões para usar as calculadoras, os computadores ou a internet no ensino

e na investigação, pois desde o seu aparecimento que o uso em ambas as actividades é um facto natural e a sua necessidade indiscutível. Considero mais útil reflectir como tirar o melhor partido desse material. O seu uso na sala de aula não é fácil, dá sempre mais trabalho, mas o esforço é quase sempre recompensado.

A Internet tem actualmente um problema — é lenta e cara no nosso país. Enquanto os computadores e a Internet não forem acessíveis a todos os professores e alunos, não para ver, olhar, mas sim para trabalhar, não podemos generalizar o ensino baseado neles, ... mas já se vai fazendo alguma coisa.

### **O Não-linear, o Caos e os Fractais**

No virar do século passado Poincaré mostrou no problema da Mecânica Celeste dos 3 corpos que a busca de soluções analíticas era inútil. Estas apresentavam um comportamento complexo e é impossível representá-las analiticamente. Para as estudar introduziu o método novo da Dinâmica Topológica, baseada na ideia de estudar as propriedades invariantes por transformações bicontínuas (homeomorfismos). No estudo dos grupos discretos infinitos também se apercebeu que os conjuntos limite, eram deveras complexos. Seus contemporâneos como Cantor, Weierstrass, Peano, von Koch e Sierpinski, introduziram objectos matemáticos igualmente complexos. Pouco depois Julia e Fatou em França, por volta de 1918 e 1919, no estudo das iteradas das aplicações complexas, encontram conjuntos semelhantes, cheios de complexidade. Hausdorff em 1919 introduziu um conceito de dimensão não-inteira (dimensão de Hausdorff) que permite diferenciá-los e medi-los.

A ligação da complexidade ao não-linear é hoje mais clara. Mas tem sido difícil ultrapassar o linear. O facto de duas soluções do sistema não se poderem somar para dar uma terceira, o princípio da sobreposição linear, é um modo de pensar difícil de ultrapassar.

Com o uso crescente do computador as múltiplas experiências computacionais têm explorado os objectos e os fenómenos não-lineares. As leis começaram a aparecer com a ordem de Sharkovsky (1962), com a universalidade das constantes de Feigenbaum (1978), etc., aquilo que se designa como a Ordem do Caos e sua caracterização por grandezas, invariantes topológicas. A ciência dos comportamentos caóticos é hoje uma realidade que atravessa transversalmente todas as ciências e também representa os comportamentos ditos complexos. Quanto às formas complexas, foi Mandelbrot que as designou por fractais, por volta de 1975.

A turbulência, na mecânica dos fluidos, a dinâmica da atmosfera, os fenómenos económicos, a estrutura e o significado do DNA, etc, são objectos de estudo com características complexas, próprias dos sistemas não-lineares. Nestes e noutros estudos é demais evidente o uso dos computadores e das linguagens de alto nível, sejam elas simbólicas como o Mathematica ou o Maple (existem outras) ou pacotes numéricos ou gráficos. Não vale a pena essa discussão sobre o uso do computador. É mais interessante lembrar o papel do espírito experimental, porque ideias erradas sobre o trabalho em Matemática, leva à falta de produção científica nos investigadores e a um ensino deficiente da Matemática. O aluno, tal como o professor, para compreender tem que experimentar, isto é, tem que descobrir por si o resultado.

### **A Tecnologia Digital e a Matemática Discreta**

É conhecido que as novas tecnologias: informáticas, multimédia (audio e vídeo), comunicações, genéticas, etc. se baseiam fortemente nas tecnologias digitais, isto é, onde a informação, o seu conteúdo determinante, é codificado em bits, em 0 e 1. É impressionante hoje depararmo-nos com qualidades superiores de imagens e sons, e no entanto, tudo é traduzido e processado com sequên-

cias finitas de 0 e 1. Esta tecnologia é causa e consequência de uma igual revolução na Matemática, em termos de qualidade e adaptabilidade à descrição da realidade — a Matemática Discreta, a Matemática que estuda as seqüências finitas  $S^*$  (ou infinitas  $S^\infty$ ) de 0 e 1, seqüências de símbolos de um dado alfabeto  $S$  (não necessariamente de 0 e 1).

A teoria da computação, a teoria dos sistemas dinâmicos simbólicos, os estudos de engenharia genética, e muitas outras áreas do saber como a teoria do caos e a geometria fractal, recorrem à Matemática Discreta.

Esta área da Matemática está em constante expansão e a sua capacidade de modelar os fenômenos naturais parece não ter limites, com a grande vantagem de a sua implementação no computador praticamente não ter erros e pouco precisar da análise numérica.

### Informação, Complexidade e formalismo termodinâmico (formalismo multifractal)

Tudo se reduz ao estudo da informação, aos seus tipos, às suas medidas e aos seus fluxos. As complexidades e a sua teoria são as leis das dinâmicas de informação (seus comportamentos caóticos e formas fractais). Informar, dar forma e formar - jornalista, artista e professor são as principais profissões da Sociedade da Informação.

Depois surgem as outras - gerir a informação (gestores), conservá-la (bibliotecários, historiadores, etc.)

Embora a ciência da informação e da complexidade seja do próximo século, temos pequenos esboços do que venha a ser - veja-se o formalismo termodinâmico ou formalismo multifractal. Formalismo que veio da abstracção da termodinâmica, da mecânica estatística, da teoria dos sistemas caóticos e da geometria fractal. O seu principal resultado é estabelecer relações entre as grandezas significativas conhecidas: entropia, expoente Liapunov e dimensão Hausdorff.

Compreender, desenvolver e ensinar a ciência da complexidade será o grande objectivo do próximo século. A Matemática no seu aspecto mais criativo ou experimental terá que ser predominante.

### Matemática Experimental

Chegados aqui, ao virar do século e depois do que se disse, trabalhar em complexidade, na investigação e no ensino dos fenômenos da informação tem como formação básica a Matemática Discreta e como método de trabalho a Matemática Experimental, o modo de descobrir e de redescobrir o real, de criar e de recriar o virtual.

### Exemplo de Matemática Experimental

Consideremos os fractais abaixo e tal como para outro qualquer sistema complexo (caótico, fractal ou de outro tipo de complexidade) perguntemonos se é possível descrever matematicamente, compreender, formalizar a sua estrutura, classificar os seus

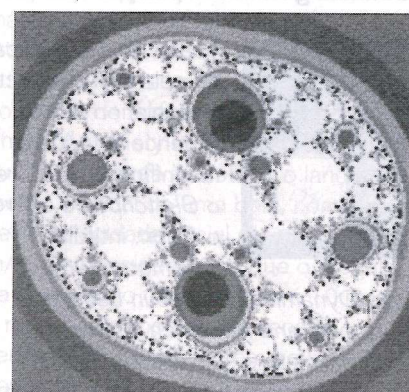
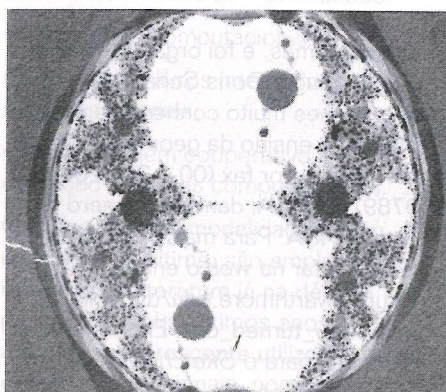
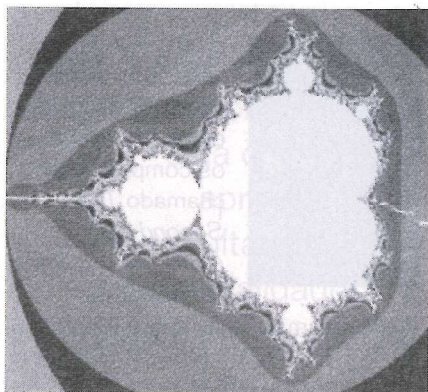
tipos, associar grandezas e suas medidas.

Desafio qualquer matemático a responder a estas questões, a fazer uma teoria matemática destes conjuntos de Mandelbrot e de Julia, isto é, a elaborar uma teoria matemática que diga alguma coisa sobre esses conjuntos, sem o recurso à matemática experimental, e sem usar os computadores.

De início parece difícil. No entanto a resposta está lá, acessível, pronta a ser descoberta, nos objectos experimentais, nas aplicações complexas, como  $f(z) = z^2 + c$ , esperando que um amante da Matemática se aproxime, se sensibilize, observe as formas belas que produzem, experimente muito (itere, formule perguntas interessantes, programe-as e execute os programas). Veja as respostas no computador, formule conjecturas, verifique-as e, por fim, prove-as, com o jogo das regras racionais da Matemática adquirida.

Se depois de experimentar toda a combinatoria de deduções das teorias feitas, isso não for suficiente, não desista, descreva o novo que experimentalmente viu. Introduza conceitos novos e novas regras para formalizar aquilo que vê pela primeira vez e estabeleça as propriedades que encontra experimentalmente.

Nesse dia terá o prazer de ter descoberto um segredo da natureza, uma melhor compreensão das formas complexas.



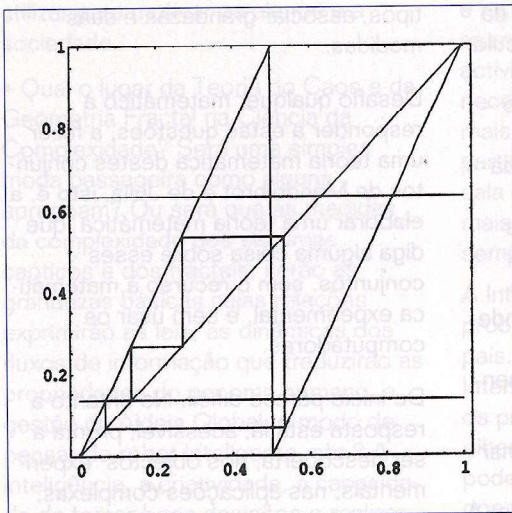


Fig. 1. Ângulo = 4/15, RRLC

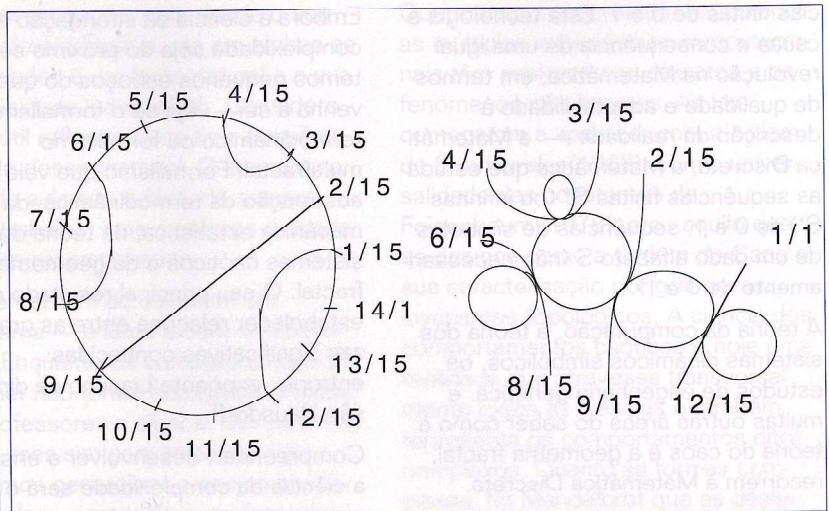


Fig. 2

Exemplo: Geometria do conjunto de Mandelbrot. Experimente a seguinte aplicação  $f(x) = 2^k x$  (módulo 1), isto é,  $x$  é um ângulo na circunferência.

Tome um ângulo racional  $x_0$  de denominador ímpar, da forma

$n / 2^{k-1}$ , como condição inicial, e considere os intervalos

$$R = ]x_0 / 2, x_0 / 2 + 1/ 2[ \text{ e}$$

$$L = ]0, x_0 / 2[ \cup ]x_0 / 2 + 1/ 2, 1[.$$

Itere, compondo  $f$  com ele próprio várias vezes. Codifique simbolicamente a órbita, isto é, construa a sucessão de símbolos R e L obtida dos endereços, intervalos visitados pela órbita. Se a órbita cai num extremo, associamos o símbolo C, e terminamos a iteração. A órbita repetirá a mesma palavra de símbolos, caso continuemos a iterar. Assim para  $x_0 = 4/15$ , temos os intervalos

$$R = ]2/ 15, 19/ 30[ \text{ e}$$

$$L = ]0, 2/ 15[ \cup ]19/ 30, 1[.$$

O intervalo de partida é R, 4/15 está em R.

Os subintervalos visitados serão R, pois  $f(4/15) = 2 \cdot 4/15 = 8/15$ , L,  $f(8/15) = 2 \cdot 8/15 = 16/15 \equiv 1/15$  e C,  $f(1/15) = 2/15$ . Assim a sucessão simbólica será RRLC (fig. 1).

O passo seguinte é identificar pares de ângulos que gerem a mesma sucessão simbólica (palavra). No caso RRLC o outro ângulo que gera a mesma sucessão simbólica é 3/15, como se pode verificar por iteração. Onde identificar, intuitivamente, é beliscar a circunferência nos valores dos dois ângulos que dão a mesma palavra e identificá-los num só ponto (fig. 2). Feito isto, por exemplo até  $k=7$ , poderá não só antever um pouco

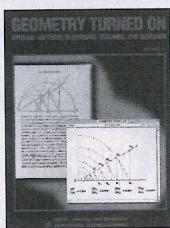
da estrutura do conjunto de Mandelbrot, como sentir o que quero significar com o método experimental em Matemática.

O Conjunto de Mandelbrot apresentado na figura tem sido muito estudado, veja-se por exemplo e para outras referências:

B. Mandelbrot, *Objectos fractais*. Ciência Aberta, n.51, Gradiva .1991.  
 M. Sarreira e J. Sousa Ramos, *Symbolic dynamics of iteration of cubic complex maps*. European Conference on Iteration Theory, Lisboa, Set. World Scientific. Singapore, New Jersey, Hong Kong., 1991.  
 M. Sarreira e J. Sousa Ramos, *Markov shifts in complex dynamical systems*, Equadiff95, Jul.24-29. 1995. Lisboa.

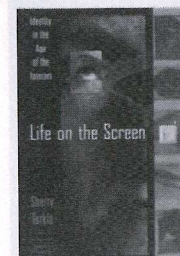
José Sousa Ramos  
 Departamento de Matemática  
 Instituto Superior Técnico

**Tecnologias na Educação Matemática • Notícias breves**



Acaba de ser publicado pela Mathematics Association of America (MAA) um magnífico livro sobre o Sketchpad e sobre o Cabri, intitulado *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. O livro contém vinte e seis artigos sobre diversos aspectos relativos a este tipo

de programas, e foi organizado por James King e Doris Schattschneider, dois nomes muito conhecidos nos meios do ensino da geometria. Pode ser pedido por fax (00 1 301 206 9789) ao MAA, dando o número do cartão VISA. Para mais informações, pode visitar na web o endereço [http://forum.swarthmore.edu/dynamic/geometry\\_turned\\_on/](http://forum.swarthmore.edu/dynamic/geometry_turned_on/). Encontrará sketches para o Sketchpad e para o Cabri incluídos nos artigos do livro.



Publicou um novo livro que recomendamos, *Life on the Screen: Identity in the Age of the Internet*,

Sherry Turkle, autora do livro pioneiro sobre as relações entre as pessoas e os computadores, chamado *The Second Self: Computers and the Human Spirit*.