

## Geometria em St. Olaf

*Eduardo Veloso*

St. Olaf é exactamente, pelo menos à primeira vista, o lugar onde todos gostávamos de ter estudado. Um verdadeiro *college* anglo-saxónico, com quilómetros de relva bem tratada, muitas árvores e esquilos, velhos e acolhedores edifícios de pedra, quartos com aquecimento ou ar condicionado, centenas de Macintosh's, bibliotecas infindáveis, todos os desportos que se possam imaginar, pequenos almoços inenarráveis para todos os gostos, desde *muesli* até ovos mexidos com *bacon*...

Nos últimos três anos o Departamento de Matemática do St. Olaf College desenvolveu um projecto subsidiado pela National Science Foundation dos Estados Unidos e destinado a melhorar o ensino da geometria (do 6º ao 12º ano). O projecto pretendia apoiar o desenvolvimento profissional de professores de Matemática de escolas e associações de escolas participantes no projecto e tinha por principal objectivo impulsionar uma transformação na educação matemática do 6º ao 12º ano de escolaridade, através de um ensino da geometria integrado ao longo destes níveis e baseado em actividades de investigação. A estratégia de desenvolvimento do projecto apresenta alguns aspectos interessantes:

1) Nos dois primeiros anos do projecto realizaram-se *workshops* de duas semanas, em Junho, em St. Olaf, destinados aos grupos de professores das escolas participantes; depois esses grupos escreveram sequências temáticas (ver caixa na página seguinte), que depois foram discutidas num novo *workshop* de três dias em Agosto.

2) De Setembro a Maio realizaram-se encontros mensais e actividades nas escolas dos diferentes distritos escolares;

3) No fim do terceiro ano realizou-se em St. Olaf College um encontro nacional (Estados Unidos) de 4 dias cujo principal objectivo era fazer uma avaliação do projecto, e em que intervieram grande parte dos professores envolvidos, bem como outros professores e especialistas no campo da renovação do ensino da geometria.

É sobre este encontro que farei em seguida um breve relato.

Dada a sua importância, voltarei a

este encontro no futuro, com mais detalhe, quando forem publicadas as respectivas actas.

### O St. Olaf College e o ambiente do encontro

O St. Olaf College está situado no estado de Minnesota, junto da cidade de Minneapolis. Foi fundado em 1874 por um sacerdote luterano norueguês imigrante. É considerado um dos melhores *colleges* privados americanos, com resultados impressionantes no que diz respeito ao número dos seus diplomados que obtêm graus de mestrado e doutoramento ou que seguem carreiras de sucesso na investigação, no ensino, na indústria, nas artes e nas letras. Como referimos noutra local, as instalações são excelentes em todos os aspectos, inclusivamente nos quartos para estudantes — os seus alunos, em número de 2800, são quase todos residentes<sup>1</sup>. Embora os alunos não tenham necessariamente que praticar a religião luterana, nota-se em todo o ambiente e no modo como o *college* é gerido a influência dos valores morais e humanos do luteranismo.

É também conhecida a excelência do corpo docente do St. Olaf. No caso da matemática, fomos encontrar dois nomes muito conhecidos — Lynn Arthur Steen, editor de livros como *Mathematics Today* ou *On the Shoulder of Giants* e figura central da educação matemática nos Estados Unidos e Judith Cederberg, autora do livro da Springer-Verlag, *A Course in Modern Geometries*.

O encontro decorreu desde a manhã de quarta-feira 25 de Junho até ao fim da tarde de sábado 28, com um programa de trabalho muito intenso, como é habitual nos Estados Unidos.

O pequeno almoço era às sete da manhã e a primeira sessão, em geral plenária, era às 8.30. Ao fim da tarde, depois do jantar (que tinha lugar entre as 5 e as 6.30 da tarde!) havia ainda sessões plenárias ou sessões nos laboratórios de computadores. Cerca das 8.30 ou 9 da noite começava finalmente o período de descanso... até às 6.30 da manhã seguinte. Como se estava no fim de Junho e numa latitude relativamente alta, a luz do fim da tarde era magnífica e convidava a longos passeios no parque do *college* e a conversas calmas sobre o ensino da geometria e as suas dificuldades... Os "alcoólicos" fugiam nessa altura do recinto do *college* e iam à vila mais próxima beber cerveja — dentro do parque do *college* o álcool está completamente banido, dentro ou fora das refeições. Como os laboratórios de computadores estão sempre acessíveis nos dormitórios, ao fim da noite ainda muitos estavam, à frente de um Mac, a discutir por exemplo a construção da lemniscata de Bernoulli ou qualquer outro projecto em *Sketchpad* ou *Cabri*.

### Linhas de força do projecto

Antes de me referir especificamente ao encontro, gostaria de deixar aqui indicados alguns objectivos específicos deste projecto:

- Criação de um currículo de geometria que esteja verticalmente integrado desde o 6º ao 12º ano, e planos para inserir a geometria e a visualização em todo o currículo de matemática nestes níveis.
- Uma renovação sistemática no ensino da geometria através de:
  - promoção, no ensino da geometria e dos seus conceitos, das actividades de investigação, de descoberta e de formulação de conjecturas;
  - melhoria dos conhecimentos em geometria dos professores por meio de um ensino que exemplifique o uso de manipuláveis, dos computadores, da escrita matemática, da aprendizagem cooperativa e do ensino diferenciado;
  - melhoria da colaboração entre

professores dos diferentes níveis de escolaridade;

- estímulo para que os professores se tornem agentes de mudança entre os seus colegas;
- intervenção nas discussões estaduais sobre os conteúdos matemáticos dos programas, os resultados e avaliação do ensino;
- constituição de parcerias entre o Departamento de Matemática de St. Olaf e os distritos escolares do estado de Minnesota participantes no projecto.

São também interessantes alguns pressupostos e requisitos colocados desde o início pelos coordenadores do projecto:

- A geometria deve ser em todos os níveis activa, experimental, descritiva, táctil e visual.
- A integração de materiais "de laboratório" e de computadores pode melhorar o ensino da geometria.
- Os professores necessitam maiores conhecimentos e compreensão da geometria.
- Os professores devem desempenhar um papel principal em qualquer projecto que tem por objectivo

responder a questões sobre as mudanças a fazer no ensino.

e) Os alunos aprendem melhor quando constroem os seus conhecimentos em geometria através de experiências conduzidas pelos professores; a realização de experiências também é fundamental para desenvolver o conhecimento em geometria dos professores.

f) Qualquer projecto que conduza à melhoria do ensino deve incluir um apoio continuado dado aos professores pelas autoridades escolares.

### Aspectos mais relevantes do encontro

Além das sessões plenárias e dos painéis de discussão, foram apresentadas comunicações, a maior parte feita por professores ou grupos de professores das equipas que participaram no projecto. Estas equipas eram constituídas algumas vezes por professores do ensino secundário e por professores universitários — de *colleges* ou Universidades do estado de Minnesota ou de estados vizinhos —, outras vezes, a maior parte, apenas por professores das escolas envolvidas no projecto.

### As sequências temáticas (*scenarios*)

Neste projecto, o primeiro veículo para ajudar os professores a aprender o processo de mudar o seu ensino de geometria é a produção por eles próprios de sequências temáticas, conjuntos de planos de lições dinâmicas e integradas, incorporando actividades de investigação.

Cada participante escreveu, individualmente ou em grupo, pelo menos uma sequência temática no primeiro ano do projecto e uma outra no segundo. Começaram a escrevê-las em cada ano no *workshop* de Junho, prosseguiram a escrita no mês de Julho, e fizeram a revisão no fim de Agosto, depois da crítica feita em grupo no *workshop* de Agosto. Seguiram essa sequência temática nas suas aulas, durante o ano escolar, e descreveram as suas experiências no *workshop* de Fevereiro. Alguns professores tornaram a rever as suas sequências para o ano seguinte.

(Tradução livre a partir do texto incluído na home page do projecto)

Alguns exemplos de sequências:

- O rectângulo de ouro, os números de Fibonacci e os sólidos platónicos.
- Transformações e pavimentações.
- Conexões entre a geometria das transformações, a álgebra II e o pré-cálculo.
- Integrando isometrias e dilatações no currículo de geometria.
- Geometria na arte, perspectiva, coordenadas e raciocínio dedutivo.
- Parábolas: uma abordagem geométrica baseada em investigações.

Outras sessões muito concorridas foram os *workshops* sobre a utilização do *Sketchpad* e do *Cabri*. Ouve *workshops* de nível elementar e de nível avançado. Os de nível avançado eram, por assim dizer, *workshops* "de luxo", pois estavam presentes no encontro os autores dos dois programas, respectivamente Nick Jakiw, da Key Curriculum Press, e Jean Marie Laborde, de Grenoble. Além disso, laboratórios para experimentação e discussão dos dois programas e também da TI-92 estiveram abertos permanentemente durante o encontro, e contaram frequentes vezes com a presença dos dois referidos autores. De resto, esta presença e a utilização em todas as conferências plenárias e em quase todas as comunicações do *software* para geometria dinâmica (*Sketchpad* e *Cabri*, sobretudo o primeiro) tornou a discussão da utilização de computadores no ensino moderno da geometria um ponto muito forte deste encontro, como não podia deixar de ser.

#### Notas sobre algumas sessões

Vamos agora referir especificamente, a título de exemplo, três sessões:

- *Principles, art and craft in curriculum design: the case of Connected Geometry*. Sessão plenária, Paul Goldenberg.

*Connected geometry* é um projecto de desenvolvimento de um currículo de geometria para o ensino secundário americano. Desse projecto irão resultar um conjunto de manuais escolares e de guias para os professores. Foram apresentados os princípios básicos sobre o ensino da Matemática com particular da geometria que estão na base desse currículo. As principais ideias subjacentes ao projecto *Connected Geometry* estão contidas num texto denominado "Habits of Mind" (modos de pensar), que publicaremos proximamente na *Educação e Matemática*.

- *The Geometry of Computer Graphics*. Sessão plenária, Nick Jakiw.

A produção de imagens em computa-

dor é uma das actividades de aplicação da geometria que tem tido um desenvolvimento mais fulgurante nos últimos anos.

A geometria — sintética, tridimensional, das transformações, projectiva, das coordenadas, etc. — assume a este respeito um papel central tão importante que se tem dito que o melhor curso de geometria que se pode imaginar é um curso de produção de imagens em computador. De entre as várias modalidades desta actividade, uma muito publicitada é a dos efeitos especiais no cinema. Na sua sessão plenária, Nick Jakiw, o autor do programa *Sketchpad*, mostrou, entre muitas outras coisas, como este programa permite fazer efeitos de *morphing*, aquele tipo de transformação que é usado para modificar de maneira "contínua" (mas não proporcional) a forma dos objectos, como a face dos personagens virtuais de alguns filmes de Spielberg. (ver caixa

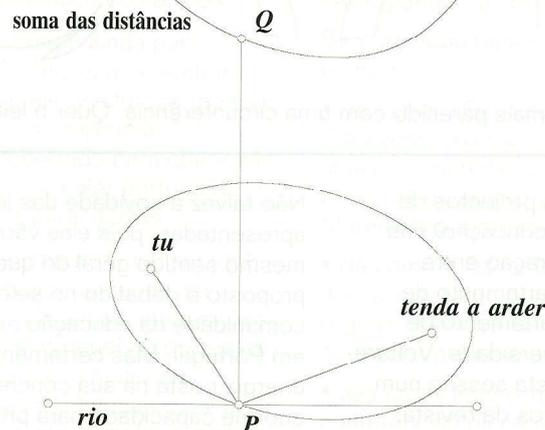
na página seguinte).

- *Beyond Intuition: Knowing if Classroom Change is Worthwhile*. Sessão plenária, por Barbara Shelly e Patricia Tinto.

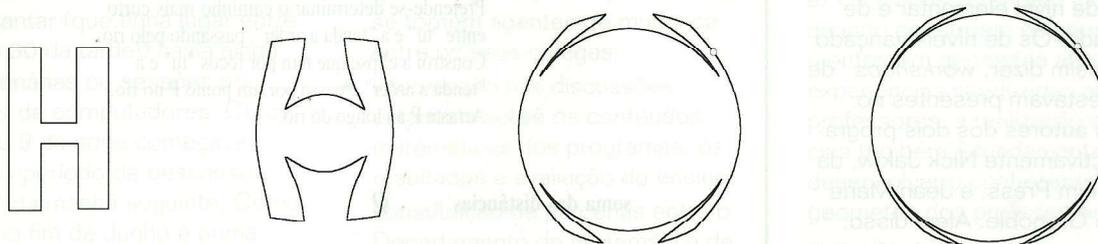
Estas duas professoras da Universidade de Syracuse, no estado de New York, trabalharam com trinta e cinco professores (8° ao 10° ano de escolaridade) durante os três anos do projecto, com o objectivo principal de integrar estratégias de aprendizagem cooperativa nas suas aulas. A equipa de coordenação deste subprojecto incluía um professor do Departamento de Matemática. Esta foi uma das mais interessantes sessões do encontro, dado que permitiu apreciar com profundidade diversas componentes essenciais do projecto: a utilização de computadores, de calculadoras gráficas e de materiais manipuláveis na realização de tarefas de investigação; a importância dada à comunicação matemática; os professores

#### Nova roupagem para um velho problema

Pretende-se determinar o caminho mais curto entre "tu" e a "tenda a arder", passando pelo rio. Constrói a elipse que tem por focos "tu" e a "tenda a arder" e passa por um ponto P no rio. Arrasta P ao longo do rio.



Paul Goldenberg apresentou, como exemplo do seu currículo *Connected Geometry*, este velho problema. A conexão aqui é com a análise.  $PQ$  é perpendicular ao rio e mede a soma das distâncias, e o ponto  $Q$  traça o respectivo gráfico. O mínimo obtém-se quando a elipse é tangente ao rio. (*Sketch* traçado no *Sketchpad*).

**Morphing com o Sketchpad**

Um "H" cada vez mais parecido com uma circunferência. Quer o leitor tentar descobrir como se pode conseguir isto?

realizando pequenos projectos de investigação (sobre educação) nas suas aulas; a colaboração entre professores do Departamento de Educação e do Departamento de Matemática, na Universidade. Voltaremos certamente a esta sessão num dos próximos números da revista.

**Nota final**

Que teve de mais notável, para um participante português, este encontro em St. Olaf?

Não talvez a novidade das ideias apresentadas, pois elas vão no mesmo sentido geral do que tem sido proposto e debatido no seio da comunidade da educação matemática em Portugal. Mas certamente a energia posta na sua concretização, a enorme capacidade para produzir reflexões, propostas e outros textos e para os discutir com eficácia, a crença, tão anglo-saxónica — ou será luterana? — de que o trabalho individual, e também o trabalho

colectivo, acabarão por vencer todos os obstáculos e contradições.

**Notas**

1. Para os estudantes residentes, o custo total anual (educação, alojamento, alimentação, etc.) ascende a cerca de 3500 contos... Encontrei muitos estudantes que trabalham durante todo o verão em diversos serviços do *college*, para pagar as propinas. É realmente um mundo diferente...

Eduardo Veloso

**Multiplicação, combinatória e desafios** (continuação da página 16)

Se eu tiver 4 saias, 3 camisolas, 2 pares de sapatos e 6 pares de meias, posso vestir-me de  $4 \times 3 \times 2 \times 6$  maneiras diferentes. Cada factor é o número de opções disponíveis para cada peça de roupa e são 4 factores porque vou vestir saia, camisola, meias e sapatos. Imaginem agora se eu decidir pôr também chapéu e casaco, ou tiver mais duas calças e alguns pares de meias à escolha. Será que preciso de ter assim tantas peças de roupa para me vestir todos os dias do ano de maneira diferente? Este é o desafio da combinatória à intuição, um aumento muito rápido do número de possibilidades que choca com os nossos sentidos e com aquilo que é esperado.

**Combinatória e desafios**

A perspectiva combinatória da multiplicação é muito mais ampla e rica que a aditiva. Aliás são as duas que abrem o caminho das progressões. Nas progressões aritméticas

está presente a multiplicação no sentido aditivo, nas progressões geométricas está presente a multiplicação no sentido combinatório.

Estivemos sempre a falar da multiplicação, mas as múltiplas perspectivas em que este conceito apareceu permitiram enriquecê-lo com a construção de imagens diversificadas e de instrumentos alternativos. Esta riqueza de imagens e instrumentos é que permite ir dotando o sujeito de um manancial de escolhas disponíveis para resolver uma situação ou problema.

Nesta discussão houve três ideias sempre presentes: aprendizagem significativa, diversidade e conexões. Aprendizagem significativa porque as questões tinham sempre um contexto familiar e passível de ser concretizado. Diversidade porque houve um apelo constante a novos casos ou novas perspectivas para o mesmo caso. Conexões porque se resolveram situações do dia-a-dia com processos matemáticos e se articula-

ram ideias matemáticas diversas.

Dito por outras palavras houve sempre desafio. Significados, diversidade e conexões são óptimos pilares do desafio, e se lhe juntarmos o inesperado o desafio torna-se imparável.

**Referências**

- Baruk, Stella (1996). *Insucesso e Matemáticas*. Lisboa: Relógio d'Água.
- Feller, William (1968). *An Introduction to Probability Theory and its applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Paige, D. & al. (1978). *Elementary Mathematical Methods*. New York: John Wiley and Sons.
- Williams, E., Shuard, H. (1990). *Primary Mathematics Today*. Longman, UK.

Cristina Loureiro  
Escola Superior de Educação  
de Lisboa