Multiplicação, combinatória e desafios

Cristina Loureiro

Neste artigo, as múltiplas perspectivas em que aparece o conceito de multiplicação permitem enriquecê-lo com a construção de imagens diversificadas e instrumentos alternativos que se tornam num manancial de escolhas disponíveis para resolver uma situação ou problema.

Quem é que já não se lembra das perguntas típicas para decidir qual a operação a utilizar num problema: "É de mais? É de menos? É de vezes? Então é de dividir!" Tive uma colega, professora de Direito, que me dizia, com um sorriso amargo no lábios, serem estas perguntas a imagem mais viva que ela guardava da matemática da escola primária.

"A Rita comprou seis quilos de laranjas ao preço de cento e cinquenta escudos o quilo. Que idade tem a Rita?"

Face a esta questão um tal Paulo empenhou-se, laboriosamente, em encontrar a solução e terá ajuizado da sua razoabilidade mais ou menos como segue:

6 x 150 = 900	não pode ser porque ninguém atinge esta idade;
150 + 6 = 156	é, ainda, um número muito grande;
150 - 6 = 144	idem;
150 : 6 = 25	ah, achei, a Rita tem 25 anos!"

Histórias como esta, contada pela Leonor Moreira na Educação Matemática nº1, são frequentes e têm sido também trabalhadas em estudos realizados sobre a utilização da matemática, (Baruk, 1996). Estas investigações continuam a mostrar que muitas crianças são capazes de encontrar resposta para um problema sem sentido, pelo simples facto de operarem com os números indicados no texto.

Analisemos um pouco a perspectiva das operações presente no raciocínio do tal Paulo. Para ele há quatro maneiras de pegar em dois números e encontrar um terceiro. Experimentadas todas quatro, aquela que fornece o resultado mais plausível é a que está correcta. E não se pode dizer que este aluno não tivesse algum domínio do cálculo e espírito crítico em relação aos resultados no contexto em causa.

É verdade que subjacente ao conceito de qualquer operação binária está sempre a ideia de correspondência que a um par ordenado faz corresponder um número. E é esta ideia que aquele aluno revela. Mas para que ele saiba decidir conscientemente qual a operação a utilizar é necessário que ele entenda os significados (sentidos) em jogo na situação e que conheça os significados (sentidos) dos instrumentos de que dispõe.

Esta é uma das razões para que qualquer operação seja sempre trabalhada a partir dos seus possíveis sentidos, ligada a contextos concretos, numa grande diversidade de situações e ao longo do tempo. Mas há mais razões. É uma assunto vasto sobre o qual novos olhares podemos lançar. Foquemos a nossa atenção numa das quatro operações fundamentais em matemática que são trabalhadas nos primeiros anos da escolaridade básica, a multiplicação.

A multiplicação é a operação que preconiza a necessidade do domínio do cálculo. É praticamente impossível avançar no cálculo de produtos sem o domínio de alguns valores básicos, a maldita tabuada. Esta ligação tem atormentado milhões de estudantes ao longo dos tempos e obscurecido para muitos professores os aspectos fundamentais do conhecimento desta operação. Saber o que é multiplicar é muito mais do que saber a tabuada. Há múltiplos indicadores de que um domínio crescente e diversificado da multiplicação arrasta o domínio do cálculo de produtos, mas não há qualquer indicação de que o conhecimento da tabuada, mesmo que compreendido, arraste o conhecimento dos vários significados da multiplicação, das suas potencialidades e do seu importante papel no raciocínio matemático.

Sentido aditivo

O sentido mais comum da multiplicação está ligado à contagem do número total de elementos de vários conjuntos com o mesmo número de elementos.

A multiplicação é assim representada e entendida como uma adição repetida. É este significado que está presente quando queremos dar resposta a perguntas do tipo:

Quantos dedos há nas duas mãos?

5+5 ou 2 x 5

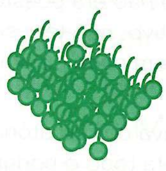
E nas mãos e nos pés?

5+5+5+5 ou 4 x 5

É importante reforçar que nestes casos está presente uma contagem que podemos fazer um a um, isto é, dedo a dedo, ou por agrupamentos, as mãos e os pés.

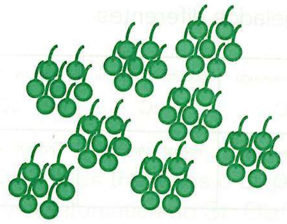
Um dos poderes da multiplicação está exactamente nesta possibilidade de agrupamento porque é ela que nos vale quando queremos contar o número de elementos de um conjunto muito numeroso.

Quantos cerejas há neste monte?



Posso contar uma a uma. Talvez tenha sorte e não me engane, mas se eu ou alguém quiser verificar se não me enganei, vou contar tudo de novo?

Se agrupar as cerejas em conjuntos, tanto quanto possível todos com o mesmo número de elementos, fico com a contagem facilitada e muito mais segura. A recontagem é imediata, ou alguém pode logo fazer uma verificação. Tenho uma nova e boa imagem visual das cerejas.



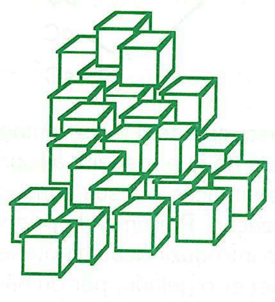
Estou a usar um modelo aditivo que se traduz numa situação multiplicativa.

São 8 grupos de 7 cerejas, 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 ou 8 x 7.

Este significado não deixa de ser um prolongamento da adição, na medida em que todas as questões podem ser resolvidas por adição. É o significado que está presente na construção das tabuadas.

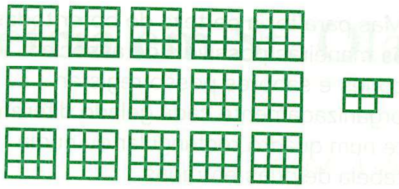
Este significado da multiplicação não permite a introdução do zero como factor. Na realidade não tem significado fazer agrupamentos de nada ou contar zero agrupamentos de alguma coisa. É um significado ligado a contextos em que o zero não tem sentido.

Não deixa de ser interessante pensar que em casos de contagem de elementos ainda não agrupados também poderá haver um resto.



Quantos cubos há neste monte?

Quando estou a fazer os agrupamentos, e decido fazer grupinhos de 9, por exemplo, pode acontecer que tenha 15 grupos de 9 e sobrem 5 cubos. Vista de cima a situação pode ter esta imagem.



Tenho 15 x 9 + 5, isto é, 140 cubos.

Porque é que me lembrei de fazer grupos de 9? Poderia fazer grupos de 10, não é por acaso que temos um sistema de numeração decimal, mas nem sempre é isso que dá mais jeito. Se quisermos de facto contar os cubos e arrumá-los numa caixa interessa fazer camadas todas iguais ocupando ao máximo a caixa.

15 camadas de 9 cubos, mais os 5 cubos que sobraram.

O resto nesta contagem é que fica de fora dos grupinhos todos iguais. O que é que se lhe faz? Soma-se no final.

A realização de agrupamentos prepara para a construção da base rectangular da multiplicação, tão intimamente ligada com o conceito de área. Ao fazer agrupamentos em linhas e colunas obtemos a visualização de um rectângulo.

Esta ideia é tão forte que se tem sobreposto a outras, muitas vezes até de forma negativa. Para muitos alunos, mesmo em níveis avançados da escolaridade, medir uma área é "base vezes altura", nada mais.

Sentido combinatório

O sentido aditivo não esgota todo o significado da multiplicação. Aliás, dá-nos uma visão limitada da multiplicação.

Com dois tipos de cones, bolacha e nougat, e três sabores, morango, ananás e chocolate, quantos gelados diferentes de um só sabor é possível fazer?

Posso começar por fazer o desenho de cada gelado ou ir registando a meu gosto as associações possíveis de cones e sabores.

bolacha com morango
nougat com morango
nougat com chocolate
nougat com ananás
...

Mas para ter a certeza de obter todas as maneiras possíveis de associar cones e sabores posso registar organizadamente cada gelado diferente num quadro rectangular ou numa tabela de duas entradas.

bolacha - morango	bolacha - chocolate	bolacha - ananás
nougat - morango	nougat - chocolate	nougat - ananás

Neste registo, as linhas mantém o tipo de cone e as colunas o tipo de sabor. Como há só dois tipos de elementos para combinar, cones e sabores, basta-me um quadro de linhas e de colunas, quadro rectangular, para registar todos os gelados possíveis de obter. Em cada célula do quadro está registado um gelado diferente, e todos estão registados, por isso o número de células é igual ao número de gelados. Obteríamos o mesmo resultado se trocássemos as linhas com as colunas. Se tivéssemos 3 tipos de elementos a combinar já não nos poderíamos servir de um quadro rectangular.

Numa tabela de duas entradas a situação é semelhante mas um pouco mais elaborada.

	morango	chocolate	ananás
bolacha	x	x	x
nougat	x	x	x

Para cada cone há 3 sabores disponíveis. Como há 2 tipos de cones há 2x3 tipos de gelados diferentes. A própria tabela ilustra este produto.

Este significado da multiplicação é combinatório. Também está presente uma situação de contagem, mas esta é extensível como vamos ver a seguir. Basta que acrescente aos gelados uma, ou mais, componentes.

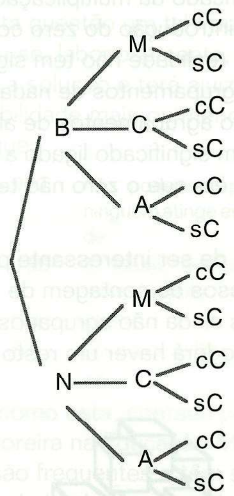
Com ou sem chantily?

Agora, com esta terceira componente, já não é possível fazer o registo num único quadro rectangular ou numa tabela de duas entradas. Neste caso tenho duas maneiras de obter a listagem de todos os gelados. Uma delas é partir do problema anterior e a cada gelado acrescentar a possibilidade de ter ou não chantily, cC e sC. É como se duplicasse a primeira listagem rectangular e por isso obtém-se 2 x 6 gelados diferentes:

bolacha - morango cC	bolacha - chocolate cC	bolacha - ananás cC
nougat - morango cC	nougat - chocolate cC	nougat - ananás cC

bolacha - morango sC	bolacha - chocolate sC	bolacha - ananás sC
nougat - morango sC	nougat - chocolate sC	nougat - ananás sC

Outra forma de resolver o problema é construir um esquema em árvore. Primeiro escolho o tipo de cone, depois o sabor e em seguida decido se leva ou não chantily. Deste modo os 12 gelados são listados assim:



Este esquema tem duas vantagens notáveis no que respeita à representação da situação e à sua consequente visualização. Por um lado permite ver que ao introduzir duas hipóteses de enriquecer o gelado, pôr ou não chantily, duplico o número de gelados, se fossem três hipóteses triplicava, se fossem quatro.... Por outro, vejo também que posso ir acrescentando componentes ao gelado, cada uma delas com o número de escolhas que se quiser, é um esquema recorrente. Estas potencialidades visuais são tão fortes que facilitam a construção e utilização mental do esquema quando o número de escolhas aumenta e as possibilidades de as combinar crescem muito rapidamente.

Com cobertura, nozes ou amendoins, ou sem?

Neste caso terei: 2 opções para o cone, vezes 3 opções para o sabor, vezes 2 opções para o chantily, vezes 3 opções para a cobertura. Isto é 36 gelados diferentes. Cada aluno da turma pode comer um gelado diferente do colega.

Neste momento há duas ideias importantes a reforçar. Uma é a possibilidade de acrescentar quantas componentes quisermos à árvore, e poder fazer-se a contagem sem precisar de a construir. A outra é o crescimento rápido do número de possibilidades obtidas que permite colocar questões interessantes, desafiadoras e quase sempre não intuitivas.

Este é o caminho do factorial e que prepara o conceito de potência. Esta é um factorial com todos os factores iguais que pode ser representado por uma árvore em que todas as séries de ramos têm igual número de ramos.

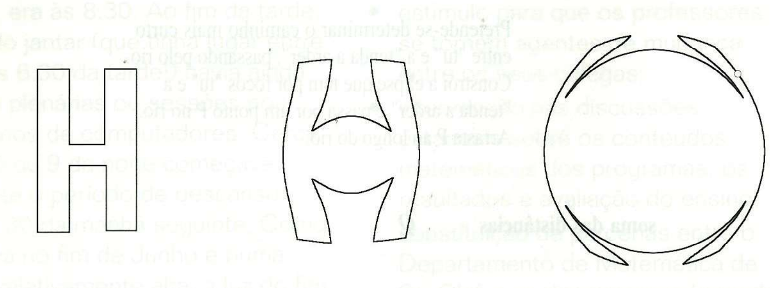
Este é o sentido da multiplicação que dá significado à potência.

Penso que esta perspectiva combinatória dá também sentido à multiplicação por zero e torna-a menos artificial do ponto de vista concreto. Se se esgotarem os cones ou os sabores não há gelados para ninguém. Isto não era possível só com o sentido aditivo, não tem significado contar filas sem nada ou um número zero de filas.

É a perspectiva combinatória que de facto completa todo o poder da multiplicação. O princípio da multiplicação, ou princípio fundamental da contagem, é a base da combinatória. Este princípio afirma que o número total de escolhas que posso fazer numa série de decisões seguidas é o produto do número de opções disponíveis para cada decisão, sendo o número de factores o número de decisões a tomar.

(*Continua na pág. 20*)

Morphing com o *Sketchpad*



Um “H” cada vez mais parecido com uma circunferência. Quer o leitor tentar descobrir como se pode conseguir isto?

realizando pequenos projectos de investigação (sobre educação) nas suas aulas; a colaboração entre professores do Departamento de Educação e do Departamento de Matemática, na Universidade. Voltaremos certamente a esta sessão num dos próximos números da revista.

Nota final

Que teve de mais notável, para um participante português, este encontro em St. Olaf? Não talvez a novidade das ideias apresentadas, pois elas vão no mesmo sentido geral do que tem sido proposto e debatido no seio da comunidade da educação matemática em Portugal. Mas certamente a energia posta na sua concretização, a enorme capacidade para produzir reflexões, propostas e outros textos e para os discutir com eficácia, a crença, tão anglo-saxónica — ou será luterana? — de que o trabalho individual, e também o trabalho colectivo, acabarão por vencer todos os obstáculos e contradições.

Notas

1. Para os estudantes residentes, o custo total anual (educação, alojamento, alimentação, etc.) ascende a cerca de 3500 contos... Encontrei muitos estudantes que trabalham durante todo o verão em diversos serviços do *college*, para pagar as propinas. É realmente um mundo diferente...

Eduardo Veloso

Multiplicação, combinatória e desafios (*continuação da página 16*)

Se eu tiver 4 saias, 3 camisolas, 2 pares de sapatos e 6 pares de meias, posso vestir-me de $4 \times 3 \times 2 \times 6$ maneiras diferentes. Cada factor é o número de opções disponíveis para cada peça de roupa e são 4 factores porque vou vestir saia, camisola, meias e sapatos. Imaginem agora se eu decidir pôr também chapéu e casaco, ou tiver mais duas calças e alguns pares de meias à escolha. Será que preciso de ter assim tantas peças de roupa para me vestir todos os dias do ano de maneira diferente? Este é o desafio da combinatória à intuição, um aumento muito rápido do número de possibilidades que choca com os nossos sen-tidos e com aquilo que é esperado.

Combinatória e desafios

A perspectiva combinatória da multiplicação é muito mais ampla e rica que a aditiva. Aliás são as duas que abrem o caminho das progressões. Nas progressões aritméticas está presente a multiplicação no sentido aditivo, nas progressões geométricas está presente a multiplicação no sentido combinatório.

Estivemos sempre a falar da multiplicação, mas as múltiplas perspectivas em que este conceito apareceu permitiram enriquecê-lo com a construção de imagens diversificadas e de instrumentos alternativos. Esta riqueza de imagens e instrumentos é que permite ir dotando o sujeito de um manancial de escolhas disponíveis para resolver uma situação ou problema.

Nesta discussão houve três ideias sempre presentes: aprendizagem significativa, diversidade e conexões. Aprendizagem significativa porque as questões tinham sempre um contexto familiar e passível de ser concretizado. Diversidade porque houve um apelo constante a novos casos ou novas perspectivas para o mesmo caso. Conexões porque se resolveram situações do dia-a-dia com processos matemáticos e se articularam ideias matemáticas diversas.

Dito por outras palavras houve sempre desafio. Significados, diversidade e conexões são óptimos pilares do desafio, e se lhe juntarmos o inesperado o desafio torna-se imparável.

Referências

Baruk, Stella (1996). *Insucesso e Matemáticas*. Lisboa: Relógio d'Água.

Feller, William (1968). *An Introduction to Probability Theory and its applications*. New York: John Wiley and Sons.

Paige, D. & al. (1978). *Elementary Mathematical Methods*. New York: John Wiley and Sons.

Wiliams, E., Shuard, H. (1990). *Primary Mathematics Today*. Longman, UK.

Cristina Loureiro
Escola Superior de Educação de Lisboa