Matemática Discreta: relações de recorrência num contexto de resolução de problemas

Graciosa Veloso

Os problemas que se apresentam são problemas de contagem, em que as relações de recorrência se revelam úteis como meio de compreensão ou como modelo de resolução da situação problemática. Este é um possível contributo para a fundamentação de outras metodologias e de outras lógicas de apresentação e de prática do programa de matemática.

Na experiência, recente, como docente do departamento de Matemática de uma Escola Superior de Educação tenho tido responsabilidades na formação científica e didáctica de alunos da variante de Matemática/Ciências Naturais e de alunos de outras variantes. Neste artigo pretendo valorizar o papel formativo de aspectos da Matemática Discreta que foram utilizados em processos de resolução de problemas de contagem.

O primeiro problema aqui apresentado, "O jogo das torres de Hanói" foi proposto a alunos do 1° ano da variante de Matemática/Ciências Naturais, no âmbito da cadeira de Análise Matemática, no capítulo das sucessões, com o propósito de valorizar matematicamente as relações de recorrência em processos de resolução de problemas. Este problema também foi proposto a alunos de outros cursos no âmbito de uma cadeira de resolução de problemas, com o propósito de trabalhar "boas" estratégias de resolução de problemas envolvendo poucos conhecimentos de matemática formal.

O segundo problema, "Qual é o número máximo de regiões definidas?" (NCTM, 1991), foi proposto ao segundo grupo de alunos, inserido num conjunto de problemas de contagem, com dois objectivos: dar importância a aspectos experimentais nos processos argumentativos e compreender o processo gerador de novas regiões utilizando a relação de recorrência como um modelo adequado.

Relações de recorrência e Matemática Discreta

Os métodos e conceitos próprios da Matemática Discreta não são novos, mas ultimamente esta tem-se desenvolvido muitíssimo graças à resolução de problemas, às aplicações da Matemática e à utilização crescente das Tecnologias de Informação. A Matemática Discreta estuda e utiliza, entre outras coisas, as relações de recorrência em processos de resolução de problemas de contagem.

Segundo Johnsonbaugh (1993) uma *relação de recorrência* para uma sequência a_0, a_1, a_2,... fica estabelecida através de uma equação que exprime o termo de ordem n, a_n, em função de termos de ordem anterior, a_0, a_1, ..., a_{n-1}, e do conhecimento de um número finito de termos da sequência, geralmente o primeiro termo.

Os problemas que se apresentam são problemas de contagem, em que as relações de recorrência se revelam úteis como meio de compreensão da situação ou como modelo de resolução da situação problemática. As relações de recorrência surgiram como modelos, naturalmente criados pelos alunos, para responder a certas situações, ou como argumentos para explicarem conjecturas por eles estabelecidas. Estas relações têm exigido saberes acessíveis aos alunos e que muitas vezes não são novos para eles. Do ponto de vista da aprendizagem esta é uma razão que contribui para mostrar a pertinência do tópico invocado. Concordando com Stephen B. Maurer & Anthony Ralston (1991) e Crisler & al. (1994) é de salientar que a utilização da calculadora e do computador requerem permanentemente a construção e a utilização de relações de recorrência.

O primeiro problema está formulado sob a forma de jogo de estratégia e o segundo apela naturalmente ao traçado de uma figura como meio de interpretação e como auxiliar de resolução.

Os problemas aqui apresentados apelam à utilização do raciocínio recursivo. Este tipo de raciocínio é particularmente importante, nomeadamente, porque está na raiz das operações de contagem e é aplicado na utilização do factor constante da calculadora e em algoritmos de computação, como por exemplo nas folhas de cálculo electrónicas.

Nos processos de resolução destes problemas utilizaram-se estratégias e relações que integram tópicos de Matemática Discreta, habitualmente não consideradas como tal e frequentemente pouco aprofundadas. Referimo-nos concretamente a relações de recorrência que integram este ramo recente da Matemática.

Dois problemas

Apresentam-se os aspectos mais significativos da discussão com os grupos de alunos no processo de resolução dos dois problemas.

O jogo das torres de Hanói

Uma das versões do jogo das Torres de Hanói consta de uma placa de madeira, com três hastes metálicas e sete "discos" de diâmetros diferentes. O objectivo do jogo consiste em deslocar para a haste 3 a torre de sete discos colocada na haste 1, com o número mínimo de movimentos. Há duas regras a saber: só pode ser deslocado um disco de cada vez; não pode sobrepor-se um disco de maior diâmetro a um disco de diâmetro menor.

Após uma fase inicial de experimentação, para compreender as regras do jogo, passou-se a uma outra etapa em que os grupos começaram a estudar a situação com 3 discos.

Depois de várias tentativas, de várias confirmações do número de passagens feitas, a organização em tabela das contagens dos movimentos dos discos, modo de organização já utilizado e valorizado em sessões anteriores, revelou-se mais uma vez estruturadora do trabalho:

Nº de discos	1	2	3	...
número mínmo de movimentos para deslocar a torre	1	3	7	

Um dos grupos, após análise desta tabela, propôs como generalização a seguinte fórmula, que exprime o número de movimentos m_n em função do número de discos n:

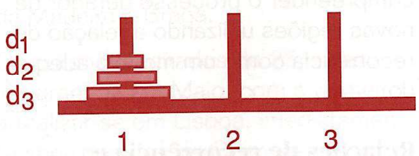
$m_n = 2^n - 1,\ n \geq 1$

Quando alunos de um dos outros grupos pediram aos colegas que lhes mostrassem como é que com 5 discos efectuavam 31 deslocações, observou-se uma certa perplexidade pois já não conseguiam obter o que ainda há bem pouco tempo tinham conseguido. Nesta fase fiz sugestões no sentido de apoiar a compreensão do processo de transferência dos discos de uma haste para outra. É este processo compreensivo que passo a apresentar.

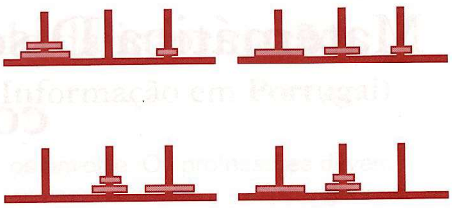
Para facilitar a discussão que se vai seguir, convém definir algumas variáveis que se vão revelar importantes.

Considere-se que d_1 representa o disco de diâmetro menor, d_2 representa o disco de diâmetro imediatamente superior ao de d_1 e assim sucessivamente, re- presentando d_n o disco de diâmetro maior, para uma torre de n discos. Considere-se ainda que m_n representa o número de deslocações efectuadas, para deslocar a torre de n discos.

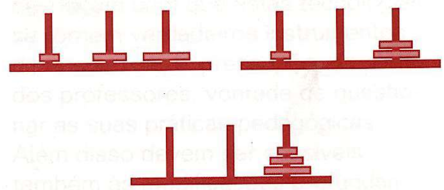
Os alunos foram convidados a observar o processo de deslocação da torre constituída por três discos, d_1, d_2, e d_3, da haste 1 para a haste 3:



Os esquemas seguintes representam a primeira parte do processo de deslocação da torre:



Como pode ser observado nas figuras acima apresentadas, para deslocar a torre com os três discos, manteve-se, sem lhe mexer, o disco d_3 na haste 1 e deslocou-se, em três movimentos a torre com os discos d_1 e d_2, da haste 1 para a haste 2. A haste 3 está agora vazia e o disco d_3 continua na haste 1. Só então se deslocou o disco d_3 para a haste 3.



Finalmente, repetiu-se o processo de deslocação da torre com os discos, d_1 e d_2, da haste 2 para a haste 3. A expressão 3+1+3 representa o total de deslocações efectuadas para transferir a torre com três discos, d_1, d_2 e d_3.

Para n = 4 será de esperar 15 movimentos, ou seja, 2 x7+1. Pode aqui conjecturar-se a seguinte relação de recorrência:

$$m_n = 2\,m_{n-1} + 1\ ,\ \text{para } n > 1$$

Esta relação de recorrência exprime a deslocação de n discos em função do número de movimentos para efectuar a deslocação de n-1 discos. Esta formalização traduz o culminar do seguinte processo: o disco d_n deve ficar isolado numa das hastes, para que possa ser deslocado, à espera que uma outra haste fique vaga para poder receber esse disco. Entretanto a torre constituída por n-1 discos deve estar arrumada na terceira haste. Resta agora repetir para n-1 discos o que já fora feito, para se obter a torre com n discos na haste pretendida.

A compreensão do processo de deslocação traduzido pela relação de recorrência anterior não foi imediata. Verificou-se que os alunos, mesmo quando já tinham obtido o resultado óptimo, tinham dificuldades em argumentar, nomeadamente repetindo, com dificuldades ou falhas de memória, as passagens efectuadas anteriormente. A compreensão da relação de recorrência traduzida pela equação

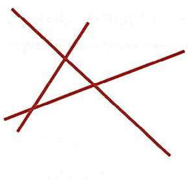
$m_n = 2\,m_{n-1} + 1$, para $n > 1$, como critério de contagem,é importante como contributo para dominar crítica e eficazmente o processo do jogo.

Pode demonstrar-se que são equivalentes as fórmulas $m_n = 2^n - 1$, $n \geq 1$ e $m_n = 2\,m_{n-1} + 1$, para $n > 1$ (Johnsonbaugh, 1993, pág. 271).

É de sublinhar o significado que os alunos atribuíram a cada uma destas fórmulas: a primeira representou a lei de formação da sequência numérica cujos primeiros termos figuravam na primeira tabela; a compreensão da relação de recorrência permitiu controlar a estratégia óptima do jogo e dar-lhe significado real. Do ponto de vista da capacidade de compreensão matemática esta relação de recorrência revelou-se mais poderosa que a primeira fórmula.

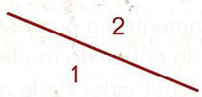
Qual é o número máximo de regiões definidas?

*Qual é o número máximo de regiões definidas no plano por **n** rectas, não paralelas duas a duas, e que se intersectam em pontos diferentes?*

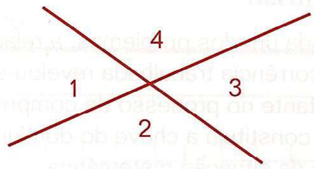


Esta é uma daquelas situações em que a vontade de experimentar deve ser imediatamente satisfeita, porque os esboços ajudam a interpretar o problema e a estabelecer algumas relações:

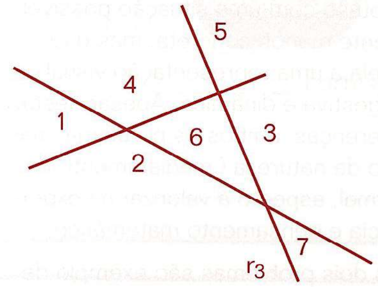
- se se considerar uma recta, o plano fica "dividido" em duas regiões,



- se se considerarem duas rectas, o plano fica "dividido" em quatro regiões,



- se se considerarem três rectas, o plano fica "dividido" em sete regiões,



- se se pensar em zero rectas obtém-se uma só região.

Os alunos recorreram também a uma tabela para registar as contagens já feitas com os esboços anteriores:

nº de rectas	0	1	2	3	...
nº (máx.) de regiões defenidas por n rectas	1	2	4	7	...

Seja r_n o número de regiões definidas por n rectas nas condições do problema.

Alguns alunos conjecturaram como generalização, a seguinte relação de recorrência: o número de regiões obtidas com n rectas é igual à soma de n com o número de regiões definidas com n-1 rectas. A tabela seguinte mostra esta generalização:

nº de rectas	0	1	2	3	n
nº (máx.) de regiões defenidas por n rectas	1	2	4	7	$r_n = n + r_{n-1}$

Para haver garantia de que a generalização proposta era válida foi feita uma discussão que no essencial consistiu no seguinte: a compreensão por visualização de que cada nova recta induz n novas regiões, relativamente às regiões definidas pelas n-1 rectas, ajudará a dar consistência à conjectura estabelecida. No último desenho, a recta r_3 induziu as novas regiões 5,6 e 7.

A fórmula de recorrência permite a construção evolutiva e dinâmica da generalização da situação, o que é de valorizar pois é uma tarefa tão frequente da actividade matemática. Os alunos, após terem feito esta generalização, colocaram a questão de como poder saber quantas regiões se obtinham com n rectas, sem que fosse necessário contar o número de regiões definidas por n-1 rectas.

Para responder a esta questão utilizou-se o método das diferenças finitas. O teorema em que este se baseia pode assim ser enunciado:

> "Toda a sucessão de números cujas diferenças de ordem *n+1* sejam nulas, é redutível a um polinómio de grau *n*."

Este método, como ilustra este exemplo, consiste em ir calculando as diferenças entre termos consecutivos até se obter zero.

	dif. ordem 1	dif. ordem 2	dif. ordem 3
$r_0 = 1$			
	1		
$r_1 = 2$		1	
	2		0
$r_2 = 4$		1	
	3		0
$r_3 = 7$		1	
	4		
$r_4 = 11$			

Como as diferenças de ordem 3 são nulas, o polinómio a construir é de grau 2 e pode escrever-se na forma $r_n = an^2+bn+c$. Há que determinar os valores dos parâmetros a, b e c. Substituindo n por 0 e como $r_0=1$ vem $r_0 = ax0^2+bx0+c=1$ e portanto c=1; Como $r_1=2$, e substituindo n por 1 na expressão de r_n, obtém-se $a+b+1=2$ e de modo análogo para $n=2$, $4a+2b+1=4$. Resolvendo este sistema de duas equações a duas incógnitas, obtém-se $a = 1/2$ e $b= 1/2$.

A expressão $r_n=0{,}5\ n^2+0{,}5\ n+1$ representa assim, o número de regiões, r_n, definidas por *n* rectas nas condições da situação apresentada.

No processo de resolução deste problema, a interpretação foi fácil e naturalmente feita com os esboços apresentados. A organização da informação pertinente, conseguida com a construção da tabela da contagem das regiões, contribuiu para o estabelecimento da relação de recorrência. Os requisitos matemáticos mobilizados foram simples. Os alunos construiram autonomamente a relação de recorrência já apresentada e que responde satisfatoriamente ao problema. Contudo, foram também os alunos que evidenciaram uma possivel limitação da fórmula — a necessidade de se recorrer ao termo anterior — ao perguntarem se não havia possibilidade de encontrar uma expressão para o termo geral r_n que dependesse apenas de n. Foi para dar resposta a esta necessidade matemática dos alunos que foi dada mais informação, ou seja, apresentei o método das diferenças finitas. Os alunos envolveram-se activamente no processo de resolução e de crítica do modelo de recorrência construído. Pode afirmar-se que, num contexto de aplicações, os alunos produziram matemática e fizeram-no com satisfação e sucesso.

Conclusão

Em cada um dos problemas, a relação de recorrência trabalhada revelou-se importante no processo de compreensão e constituiu a chave do domínio crítico da situação matemática inerente. No primeiro problema o contexto da compreensão incluiu material manipulável; no segundo lidou-se com uma situação possivelmente menos concreta, mas que apela a uma representação visual sugestiva e dinâmica. Apesar destas diferenças, ambos os problemas não são de natureza (imediatamente) formal, aspecto a valorizar na experiência e pensamento matemático.

Os dois problemas são exemplo de situações em que os alunos têm de criar modelos eficazes de contagem sistemática. Estes modelos requerem raciocínio crítico mas não exigem muitos conhecimentos de matemática formal, o que, segundo Gardiner (1991) é frequente em muitos problemas que envolvem processos da Matemática Discreta.

É de salientar que a valorização das relações de recorrência nos problemas apresentados é um possível contributo para a fundamentação de metodologias (mais) adequadas à renovação curricular do ensino básico.

Finalmente, fica a ideia de que mais do que propôr "outros" conteúdos programáticos há que continuar a procurar outra(s) lógica(s) de apresentação e de prática do programa de Matemática.

Referências

Crisler, N. & al.(1994). *Discrete Mathematics Through Applications*. New York: Freeman.

Johnsonbaugh, Richard (1993). *Discrete Mathematics*.Prentice-Hall, Inc.

Gardiner, Anthony D.(1991). *A Cautionary Note*. In Margaret J. Kenney & Christian R. Hirsch (eds), *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (1991 Yearbook of the NCTM). Reston, Va: NCTM.

Maurer, Stephen B. e Ralston, Anthony (1991) *Algoritms: You cannot Do Discrete Mathematics without them*. In Margaret J. Kenney & Christian R. Hirsch (eds), *Discrete Mathematics Across the Curriculum, K-12* (1991 Yearbook of the NCTM). Reston, Va: NCTM.

NCTM(1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Graciosa Veloso

Escla Superior de Educação de Setúbal

Correcção

O artigo da autoria de Cecília Monteiro e Cristolinda Costa, intitulado "Dificuldades na aprendizagem dos números racionais", foi publicado no nº 40 da "Educação e Matemática" com duas gralhas que a seguir se corrigem:

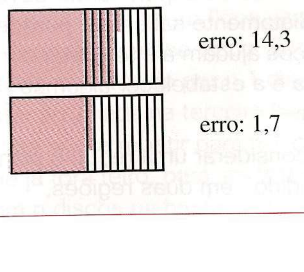
- Na página 62, 3º coluna, ponto 2, 7ª linha, onde está

  "ou 2 como o mais próximo de 0,18"

  deverá estar

  "ou 0,2 como o mais próximo de 0,18"

- Na figura da página 63, 1ª coluna, o 3º e 4º esquemas deverão conter apenas um quadrado inteiro sombreado (em lugar de dois), como se mostra nas figuras aqui reproduzidas.



As nossas desculpas às autoras do artigo e aos leitores da revista.