



O problema deste número

Sobre o problema anterior

O problema da revista número 42 foi "16 números num quadrado".

Em cada uma das 16 casas de um quadrado de 4×4 está um número natural. Uma pessoa escolhe algumas das casas ao acaso e multiplica os respectivos números. Depois anuncia o resultado da multiplicação.

– Qual é o menor conjunto de números que devo colocar no quadrado para que, ao conhecer o resultado da multiplicação, consiga identificar quais foram as casas escolhidas?

Questão adicional:

– Qual é o menor conjunto de 16 números consecutivos nestas condições?

Bem, que aconteceu aos habituais entusiastas dos problemas? É que desta vez só nos chegou uma resposta. Uma só, vinda de Évora (Évora, sempre Évora...) e é da autoria do Carlos Moura. Eis a sua resolução, em linhas gerais.

O 1 não pode pertencer ao conjunto. Nunca saberíamos se ele tinha saído ou não.

Se os números forem todos primos, pela unicidade da decomposição de um produto, temos a garantia de descobrir os números escolhidos.

Então, os primeiros 16 primos, do 2 ao 53, servem para já.

No entanto, como até aqui cada primo só aparece uma vez, podemos também incluir os quadrados dos números primos mais baixos: o 4, o 9 e o 25 (e eliminar o 53, o 47 e o 43).

Agora, na decomposição em factores primos, pode aparecer por exemplo uma só vez o 2 (e sabemos que foi escolhido o número 2), ou duas vezes (foi o 4), ou três vezes (foram o 2 e o 4).

Mas agora, como o 2 não aparece mais de três vezes em qualquer decomposição, podemos incluir o 16 (que é 2 elevado a 4) e retirar o 41.

Está encontrado o menor conjunto nas condições pedidas.

2	3	4	5
7	9	11	13
16	17	19	23
25	29	31	37

A pergunta adicional tem uma análise mais complicada e trabalhosa. É

preciso investigar cada série de 16 números seguidos e ver onde é que falha.

2–17 falha com $8 \times 15 = 10 \times 12$

(e as séries seguintes também.)

9–24 com $15 \times 24 = 18 \times 20$

16–31 com $20 \times 30 = 24 \times 25$

21–36 com $24 \times 36 = 27 \times 32$

E assim sucessivamente. O mais complicado surge em duas séries onde os produtos têm 3 factores:

37–52 com $38 \times 48 \times 50 = 40 \times 45 \times 52$

43–58 com $44 \times 50 \times 54 = 45 \times 48 \times 55$

Finalmente, encontramos uma série nas condições pedidas quando chegamos aos números de **46 a 61**.

Carlos Moura explica como depois testou esta solução. Começou por retirar da série todos os números primos ou todos aqueles em que, na sua decomposição aparecia um primo que mais nenhum outro tinha. Ficou apenas com seis números: 48, 49, 50, 54, 56 e 60. Ora, é fácil ver que com estes números não é possível arranjar dois produtos iguais.

Note-se que a noção de "menor conjunto" que aparece no enunciado do problema é ambígua. Podemos admitir que um conjunto é "maior" que outro se o seu máximo for maior que os números do outro conjunto.

O próximo problema, "Dez bolas num saco" é uma variante dos anteriores, embora necessite de uma abordagem diferente. Se o resolverem vão ver que tem uma solução surpreendente!

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira
Lisboa

Problema proposto

Dez bolas num saco

Num saco temos dez bolas, cada uma de sua cor, cada uma com seu número. Se alguém retirar **duas** bolas e nos disser a soma dos dois números, conseguimos sempre descobrir as cores das bolas.

Qual é o menor conjunto de números naturais que devo usar para conseguir isto?

(Respostas até 8 de Setembro)