Esparguete, triângulos e probabilidades

João Filipe Matos, Departamento de Educação da F.C.L.

Os trabalhos de Polya, em torno da resolução de problemas no ensino da Matemática, encerram a ideia de que um Problema deve constituir, tanto quanto possível, uma situação interessante para quem o resolve. Isto poderá acontecer com um problema estreitamente ligado a uma situação real ou poderá tomar a forma de uma situação imaginária mas interessante. Com uma embalagem de esparguete, alguma imaginação e um computador para fazer os cálculos, proponho um breve passeio pela Matemática, através de um desses problemas inventados enquanto se faz o jantar.

O Problema

Se partirmos um pedaço de esparguete, ao acaso, em três pedaços, qual é a probabilidade de se poder construir um triângulo com esses três bocados?

Uma forma de abordar o problema poderá ser através da realização de uma simulação. Pegar numa embalagem de esparguete e, com o pretexto de ajudar a preparar o jantar, realizar tantos ensaios quantos os bocados de esparguete que encontrarmos na embalagem. «Basta» partir aleatoriamente cada esparguete em três pedaços e tentar construir com eles um triângulo. Poderemos no entanto ter alguma dificuldade em partir aleatoriamente o esparguete. Uma solução será deixá-lo cair sobre uma mesa, mas não temos a garantia de que ele se parta em três pedaços. Além disso a fractura do esparguete poderá mesmo não ser aleatória e teremos outro problema interessante a investigar (curiosamente encontrei uma regularidade notória na fractura por queda numa conhecida marca de esparguete).

Por outro lado, poderemos querer saber, à partida, o número aproximado de esparguetes que existem numa embalagem, sem termos de os contar individualmente. Desta forma criaremos um outro problema que tem interessantes abordagens e que deixarei para outra ocasião.

Simulação em computador

Parece portanto suficientemente demonstrado que não é prático realizar a simulação do problema proposto através da manipulação dos esparguetes (para além do atraso na preparação do jantar...). Aqui o computador poderá ser extremamente útil. Através da função *random* o computador pode gerar números (pseudo)aleatórios[1].

Se designarmos por X, Y e Z os comprimentos dos três pedaços de um esparguete de comprimento unitário, as condições em que é possível construir um triângulo são as seguintes:

$$X+Y+Z=1 \text{ e } |X-Y|<Z<X+Y$$

com X, Y e Z positivos.

Usando a linguagem LOGO podemos construir, de diferentes formas, um conjunto de procedimentos que permita simular o problema para um dado número de esparguete. Os procedimentos ESPARGUETE e TESTE constituem uma das formas de realizar esta simulação em LOGO:

```
TO TESTE
MAKE ''X 1+RANDOM 98
MAKE ''Y 1+RAMDOM (99-:X)
MAKE ''Z 100-:X-:Y
IF AND :Z<:X+:Y :Z>ABS (:X-:Y) [OUTPUT ''TRUE]
OUTPUT ''FALSE
END

TO ESPARGUETE :N
MAKE ''R 0
REPEAT :N [IF TESTE [MAKE ''R :R+1]]
PRINT :N
PRINT :R
PRINT :R/:N
END
```

O procedimento ESPARGUETE inicializa a variável R com o valor zero. Esta variável é o contador de casos em que a construção do triângulo é possível. Realizando N ensaios (isto é, partindo N esparguetes) temos que fazer N vezes o teste de possibilidade de construção do triângulo, através do subprocedimento TESTE. Os valores de X, Y e Z (comprimentos dos pedaços de esparguete) são gerados pelo computador através da função *random*. Notar que, por exemplo, *random 98* gera um número aleatório entre 0 e 97. No caso de o teste ser positivo (isto é, ser possível a construção do triângulo) resultará do procedimento TESTE o valor TRUE, sendo incrementado de uma unidade o valor de R. No final dos N ensaios, o computador imprime os valores de R, N e R/N.

Resultados da simulação

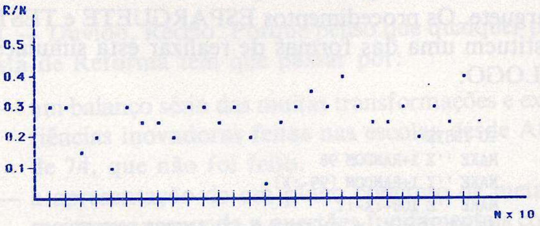
Diversos ensaios realizados com estes procedimentos na versão LOGOWRITER produziram os seguintes resultados:

- ESPARGUETE 20 R/N=0.2
- ESPARGUETE 50 R/N=0.12
- ESPARGUETE 100 R/N=0.15
- ESPARGUETE 400 R/N=0.2375
- ESPARGUETE 800 R/N=0.2117

O ensaio ESPARGUETE 1000000, realizado na versão IBM-LOGO, produziu o resultado $R/N = 0.241812$.

De notar que o aumento do número de ensaios não corresponde necessariamente a um valor mais aproximado da probabilidade. É preciso ter em consideração os erros de arredondamento cometidos pelo computador (ver a este respeito o artigo PI nesta revista).

Estes resultados permitem ter uma ideia do valor da probabilidade procurada. Notar ainda que com uma sucessão de ensaios representada num referencial poderemos criar uma ideia da tendência do valor da probabilidade.

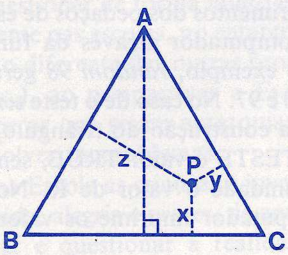


E naturalmente que poderíamos avançar nesta previsão através de meios mais sofisticados.

Interessa-nos no entanto encontrar o valor exacto da probabilidade.

A solução exacta em coordenadas triangulares

Tomando um triângulo equilátero ABC de altura igual à unidade, e se para todo o ponto P do plano, considerarmos X a sua distância a BC, Y a sua distância a AC e Z, a sua distância a AB, teremos o ponto P definido pelas suas coordenadas triangulares em relação a ABC. Para cada uma das rectas suporte dos lados do triângulo, o semiplano positivo é o que contém o triângulo.



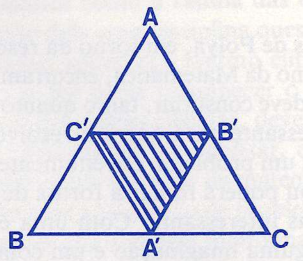
Nestas condições, os pontos interiores ao triângulo são pontos M tais que

$$X>0,\ Y>0,\ X+Y+Z=1$$

o que é facilmente verificado, por exemplo, através da equivalência entre os valores das áreas dos triângulos de alturas X, Y e Z, e a área do triângulo ABC.

Desta forma todo o esparguete ideal partido em três pedaços é representado de forma biunívoca por um ponto interior ao triângulo. Assim, a probabilidade que procuramos corresponde à probabilidade de o ponto M ficar num dado domínio interior ao triângulo, sendo portanto proporcional à área desse domínio, qualquer que seja a sua forma e posição.

As condições $X+Y+Z=1$ e $|X-Y|<Z<X+Y$ resultam em $X<1/2$, $Y<1/2$ e $Z<1/2$, o que corresponde ao interior do triângulo A'B'C'. Podemos então concluir que o valor da probabilidade é 1/4.



Conclusão

Não considerámos o caso limite do triângulo degenerado em que $Z=X+Y$ e, na verdade, podemos agora concluir que esses casos não alteram o valor da probabilidade, dado que a área da linha poligonal ABC é nula. Deve notar-se, a propósito, que na simulação apenas considerámos casos em que o esparguete é partido em pedaços de comprimento inteiro, quando na realidade há infinitas formas de partir o esparguete. Isto pode sugerir uma nova formulação para o problema: tomando dois pontos ao acaso sobre o intervalo [0 1] de **R**, e sendo X e Y as suas abcissas, eles determinam três segmentos cujos comprimentos totalizam 1 unidade. Qual é a probabilidade de que, com aqueles três segmentos, seja possível construir um triângulo?

Deixo a resolução ao leitor, sugerindo apenas a utilização da medida de Lebesgue (correspondente à probabilidade).

Trata-se de um tipo de problema que permite integrar domínios da Matemática que são habitualmente considerados «estanques» no ensino secundário, nomeadamente as Probabilidades, a Geometria, a Análise. Pode permitir ajudar a construir uma visão integrada da Matemática, através do reconhecimento da necessidade de aplicar numa mesma situação elementos tradicionalmente separados no ensino. Aliás, esta visão da Matemática, como «um conjunto de capítulos» organizados numa certa sequência sem uma perspectiva integradora, é infelizmente muito comum entre os estudantes e mesmo entre alguns professores.

Simultaneamente pode constituir um tipo de problema que permite uma exploração rica, quer através de novas formulações, quer em problemas «paralelos» (como por exemplo, a caracterização do tipo de fractura do esparguete no caso do problema proposto). É importante que o problema seja suficientemente aberto para permitir diferentes vias de exploração. E uma situação interessante — mesmo que imaginária — é certamente o melhor contexto para o Problema.

[1] Na realidade os números gerados com esta função não são aleatórios, mas dado que o período de repetição desses números é muito elevado, podemos considerá-los como tal para a nossa simulação. Note-se que apesar de tudo o computador «simula» a criação de números aleatórios.