Sismos, Exponenciais e Logaritmos: uma proposta de modelação matemática

António Bernardes e Teresa Colaço

É importante que os alunos descubram a Matemática que existe no dia-a-dia e a forma como ela é utilizada nas outras ciências. Fazendo uso da sua experiência pessoal, é-lhes mais fácil interpretar as situações, assim como analisar e criticar os resultados que vão obtendo.

As propostas de trabalho sobre aplicações da Matemática

Um dos aspectos que nos agradou quando surgiram os actuais programas de Matemática do Ensino Secundário foi o relevo dado, nas orientações curriculares, às aplicações da Matemática e às conexões desta com a Realidade, bem como com outras disciplinas.

Igualmente, na reformulação dos programas que irão entrar em vigor em 97/98, pode ler-se sobre a capacidade de utilizar a matemática: "A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, nomeadamente a propósito do estudo da Estatística e das Funções, constituem uma oportunidade de abordar o método científico. A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geografia, ..." (M. E., 1995).

Quanto a nós, estas ligações são uma vertente importante do ensino/aprendizagem da Matemática, na medida em que dão uma maior visibilidade à matemática, ou seja, dão significado a certos conceitos e conteúdos matemáticos que de outra forma estão condenados a serem tratados num plano abstracto.

É indispensável todo o trabalho que vá no sentido de serem os alunos a criarem a sua própria imagem dos conceitos e das técnicas matemáticas antes da sua formalização. Por exemplo, é diferente resolver a equação $y = kx$ em ordem a x num contexto puramente matemático, de resolver, por exemplo, a equação $P = np + t$ em ordem a n no contexto de um problema sobre contas telefónicas. Na primeira, a relação de dependência entre as variáveis é tratada num plano abstracto, na segunda essa relação toma um significado concreto, Preço = nº de impulso . preço por impulso + taxa. É evidente que esta perspectiva não dispensa a formalização dos conceitos e o treino de certas técnicas.

É igualmente importante que descubram a matemática que existe no dia-a-dia e a forma como ela é utilizada nas outras ciências na medida em que, ao reconhecerem algo que lhes é familiar, da sua vida ou das outras disciplinas, ganham confiança no trabalho que estão a desenvolver. É-lhes mais fácil interpretar as situações, assim como analisar e criticar os resultados que vão obtendo, pois podem utilizar a sua experiência pessoal.

Esta interacção entre Matemática, "mundo exterior" e outras disciplinas é apontada muitas vezes também como um elemento motivador dos alunos. No entanto, da nossa experiência de trabalho destes três últimos anos, desde a generalização do 10º até ao 12º ano, os alunos não responderam com entusiasmo a problemas que lidavam directamente com conceitos dados na Física. Contudo, mesmo nestes casos, em que a motivação não era grande à partida, logo que eles "entravam" nas situações lidavam com elas com grande empenhamento e tiveram a vantagem de dar um contexto ao tratamento de certos conteúdos matemáticos.

De uma maneira geral, os alunos reagiram melhor a propostas que não estavam directamente ligados a conteúdos de outras disciplinas, encarando com muito mais entusiasmo aquelas que eram construídas a partir de situações do dia-a-dia. Por exemplo:

- Esboçar o gráfico da relação idade/altura desde o nascimento até à actualidade;
- Descobrir o modelo matemático que é utilizado na conta do telefone;
- Elaborar um trabalho estatístico sobre a população da freguesia a que pertence a escola.

As primeiras nem ocuparam uma aula, a última durou um ano lectivo com momentos de trabalho na aula e fora dela. Foram propostas diferentes mas igualmente importantes. O trabalho estatístico foi importante do ponto de vista de aplicação e consolidação dos conceitos e de análise e interpretação dos resultados. Os outros serviram nomeadamente para os alunos se aperceberem de que é possível comunicar e traduzir matematicamente situações tão próximas deles que até passam despercebidas, e que não estão habituados a que sejam abordadas do ponto de vista matemático.

Uma proposta de trabalho: Sismos, Exponenciais e Logaritmos

Desde o início do ano lectivo passado fazia parte do nosso plano de trabalho realizar uma actividade de modelação com os alunos e a trigonometria parecia-nos ser um tema que se prestava para tal. O tempo foi passando e nós sempre à procura de uma situação que nos agradasse, fazendo consultas, folheando livros. O tempo continuava a passar tal como o capítulo da trigonometria, até que nos apareceu um assunto que nos chàmou a atenção pois permitia mexer com muitos dos conteúdos que iríamos tratar no capítulo seguinte, Funções Exponencial e Logarítmica.

Mas como uma proposta não surge de um dia para o outro demorou algum tempo a ser elaborada e as aulas a decorrerem. Logo, por motivos óbvios ela iria ser dada aos alunos no final do capítulo. E assim surgiu a ideia de duas propostas. A primeira em que lhes era dado um modelo matemático e colocadas questões à volta dele, a segunda em que lhes era dada uma situação real e lhes era pedido a construção de um modelo. As duas propostas são apresentadas em anexo.[1]

As propostas e o trabalho com os alunos ...

Segue-se a análise das duas tarefas, e a descrição do trabalho desenvolvido com os alunos. A tarefa 1 foi dada como trabalho de casa, pois envolvia conceitos já dados e trabalhados. Na aula seguinte, de 2 horas, foi corrigida a tarefa 1 e feita a tarefa 2.

Tarefa 1

As primeiras duas questões tiveram como objectivo a familiarização dos alunos com o modelo matemático dado e envolveu apenas a resolução de equações com logaritmos.

Nas outras duas questões foi analisada a forma como a variação de uma das variáveis influenciava a variação da outra. Na questão 1.3, os alunos, usando o modelo dado, verificaram que um sismo 10 vezes mais "intenso" provoca uma variação de apenas 0,67 unidades na escala de Richter. Ou seja:

$M_{10E} - M_E = 0{,}67(\log_{10} 10E - \log_{10} E) = 0{,}67.\log_{10} f(10E;E) = 0{,}67.\log_{10} 1 = 0{,}67$

Na questão 1.4, os alunos concluiram que o acréscimo de uma unidade na escala de Richter provoca um sismo cerca de 31 vezes mais "intenso". Para tal determinaram a inversa da função dada,

$$E = 10^{\frac{M+7{,}9}{0{,}67}}$$

e compararam a variação de energia de um sismo de grau 3 com a de um de grau 2. Ou seja:

$$\frac{E_3}{E_2} = 10^{\frac{3+7{,}9}{0{,}67} - \frac{2+7{,}9}{0{,}67}} = 10^{\frac{1}{0{,}67}} \approx 31$$

A correcção destas quatro questões foi feita rapidamente pois os alunos não tiveram qualquer dificuldade na sua resolução. A partir da discussão dos resultados por eles obtidos surgiu-lhes a ideia de fazer a generalização das questões 1.3 e 1.4 e de discutir o seu significado real, ou seja:

A) Se a energia libertada por um sismo for *k* vezes maior que a de outro qual é a diferença entre as respectivas magnitudes?

B) Qual é a variação de energia provocada pelo acréscimo de *x* unidades na escala de Richter?

Os alunos chegaram às seguintes conclusões:

A) $M_{kE} - M_E = 0{,}67(\log_{10} kE - \log_{10} E) = 0{,}67.\log_{10} f(kE;E) = 0{,}67 . \log_{10} k$

B) $\dfrac{E_{M+x}}{E_M} = 10^{\frac{M+x+7{,}9}{0{,}67} - \frac{M+7{,}9}{0{,}67}} = 10^{\frac{x}{0{,}67}} = 31^x$

Estes resultados serviram para voltar a discutir o significado do logaritmo de um número. Como o logaritmo de um número é um expoente (Magnitude), uma pequena variação da Magnitude não é tão insignificante quanto possa parecer em termos da variação da Energia libertada. Uma acréscimo de "apenas" 3 unidades na Magnitude corresponde à libertação de uma Energia cerca de $31^3 = 29791$ maior. Pode ser a diferença entre um sismo e um terramoto.

Este facto pode ser observado graficamente, representando as duas funções estudadas numa escala semi-logarítmica (figura 1).

Tarefa 2

Esta tarefa tinha como objectivo a criação de um modelo que se adaptasse aos valores da tabela dada. Para isso, e como este tipo de trabalho não é fácil nem usual para os alunos, as 5 questões tinham como objectivo orientá-los.

A questão 1 pretendia levar os alunos a reflectir sobre a dificuldade de representação dos valores dados num

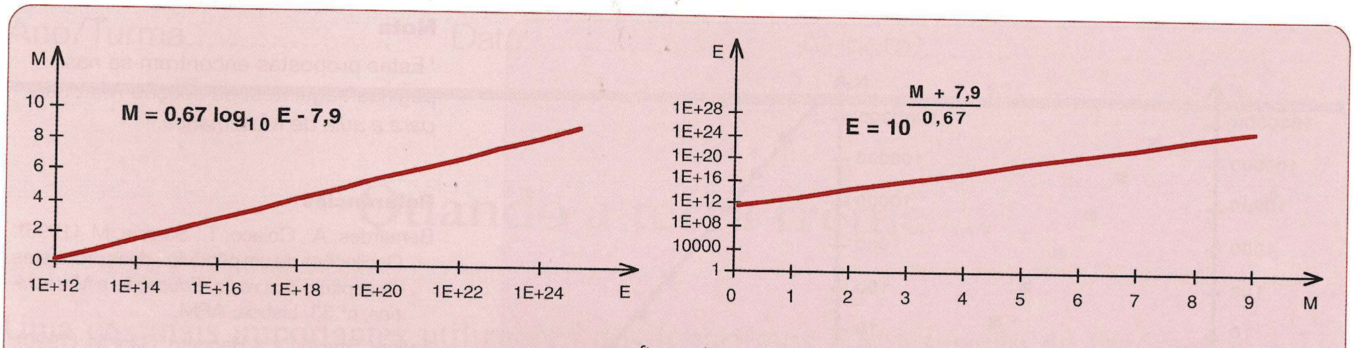


figura 1

referencial, devido à sua grandeza. Tinham a consciência que os pontos do gráfico se dispunham aproximadamente como os de uma função exponencial decrescente, mas cuja expressão não eram capazes de encontrar. Propusemos então o uso de papel semi-logarítmico para a representar. Este era desconhecido de todos os alunos e houve a necessidade de fazer uma interpretação do seu uso, o que não foi fácil. No eixo das abcissas cada marca principal representa, em relação à anterior, um acréscimo de uma unidade na escala utilizada (0, 1, 2, 3, ...). No eixo das ordenadas cada marca principal, a partir do 1, representa em relação à anterior um valor dez vezes superior (10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ...).

Por exemplo, quando N = 49000, como $49000 = 4{,}9 \times 10^4$, aquele valor será representado entre 10^4 e 10^5, aproximadamente 4,7 marcas acima do eixo das abcissas, visto que:

$\log_{10} 49000 = \log_{10} (4{,}9 \times 10^4) = \log_{10} 4{,}9 + \log_{10} 10^4 \approx 0{,}7 + 4 = 4{,}7$

Assim no papel semi-logarítmico a função que é exponencial aparece com aspecto linear devido à escala do eixo das ordenadas, como se observa no gráfico A (figura 2). Significa que se em vez de representarmos a função N = f(M) numa escala semi-logarítmica, representarmos a função $\log_{10} N = f(M)$ numa escala monométrica, esta terá um comportamento linear pois $N = 10^{\log_{10} N}$, como se ilustra no gráfico B (figura 2).

No gráfico B, os pontos dispõem-se aproximadamente sobre uma recta cuja equação é do tipo $\log_{10} N = mM + b$. Os alunos obtiveram-na a partir de dois dos seus pontos, por exemplo P_1 (2 ; 5,47712) e P_2 (7 ; 1,25527). Chegaram aos seguintes resultados: m = -0,84437 e b = 7,16586.

A equação da recta é:

$\log_{10} N = -0{,}84437\, M + 7{,}16586$

Resolvendo esta equação em ordem a N obtêm-se:

$$\mathbf{N = 10^{-0,84437M\ +\ 7,16586}}$$

que como se previa representa uma função exponencial decrescente.

Confrontando os valores obtidos a partir deste modelo com os valores

M (Magnitude)	N (Nº de sismos por ano)
8	1
7	18
6	108
5	800
4	6200
3	49000
2	300000

M	$\log_{10}$ N
8	0
7	1,25527
6	2,03342
5	2,90309
4	3,79239
3	4,69020
2	5,47712

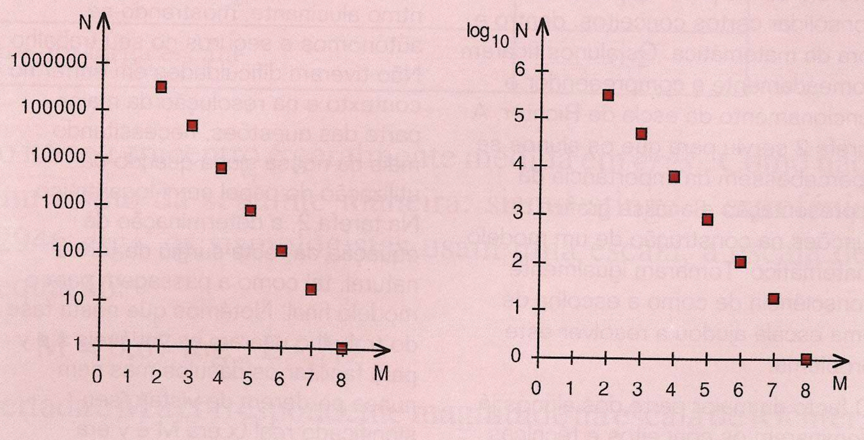
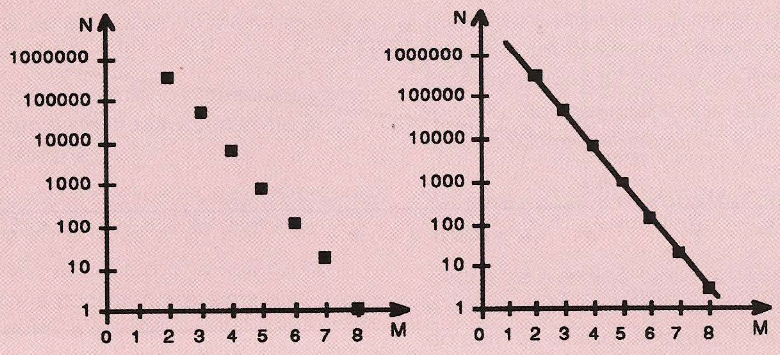


figura 2



M	N (valores reais)	N (valores do modelo)
8	1	2
7	18	18
6	108	126
5	800	883
4	6200	6166
3	49000	43053
2	300000	300608

figura 3

dados na tabela inicial obtém-se o que se ilustra na figura 3.

Algumas considerações finais

As propostas atingiram o que tinhamos estabelecido à partida. A tarefa 1 serviu para relacionar e consolidar certos conceitos, dentro e fora da matemática. Os alunos ficaram nomeadamente a compreeender o funcionamento da escla de Richter. A tarefa 2 serviu para que os alunos se apercebessem da importância da representação e análise gráfica de funções na construção de um modelo matemático. Tomaram igualmente consciência de como a escolha de uma escala ajudou a resolver este problema.

O facto da maior parte dos alunos já dominarem os conceitos e técnicas algébricas necessárias à resolução das tarefas, excepção feita à representação em papel semi-logarítmico, ajudou a que centrassem o seu trabalho na compreensão da situação, na análise do funcionamento dos modelos (tarefa 1) e na criação do modelo matemático da tarefa 2.

Os alunos trabalharam em grupo a um ritmo alucinante, mostrando-se autónomos e seguros no seu trabalho. Não tiveram dificuldades em entrar no contexto e na resolução da maior parte das questões, necessitando mais da nossa ajuda quando da utilização do papel semi-logaritmico. Na tarefa 2, a determinação da equação da recta surgiu de forma natural, tal como a passagem para o modelo final. Notámos que nesta fase do trabalho usaram as variáveis x e y para facilitar os cáculos mas sem nunca perderem de vista o seu significado real (x era M e y era $\log_{10}$N). Quando acabaram os cálculos fizeram a mudança de variável.

Nota

[1] Estas propostas encontram-se nas páginas seguintes, na secção *Materiais para a aula de Matemática.*

Referências

Bernardes, A., Colaço, T., Saraiva, M. (1995). Oscilações de um pêndulo.: duas propostas no capítulo dos reais. *Educação e Matemática*, nº 33. Lisboa: APM.

Farlow, Stanley J. & Haggard, Gary M. (1990). *Introduction to Calculus with Applications.* New York: McGraw-Hill.

Lopes, Ana Vieira e outros (1994). *Matemática 12* (Vol. 1). Manual escolar. Porto: Contraponto.

Ministério da Educação (1996). *Programa de Matemática*, 10º, 11º e 12º Anos, 1997/98. Porto: Departamento do Ensino Secundário.

Waltham, David (1994). *Mathematics: A simple tool for Geologists.* London: Chapman & Hall.

António Bernardes
Escola Secundária de Gil Vicente
Teresa Colaço
Escola Secundária de Gil Vicente

Materiais para a aula de Matemática

As actividades propostas nas três páginas seguintes são aquelas a que se refere o artigo intitulado "Sismos, Exponenciais e Logaritmos: uma proposta de modelação matemática", de autoria de António Bernardes e Teresa Colaço.

Estas propostas de trabalho, que envolvem relações da Matemática com a realidade e actividades de modelação, dizem respeito a conteúdos do programa do secundário relativos ao tema "Função Exponencial e Logarítmica".