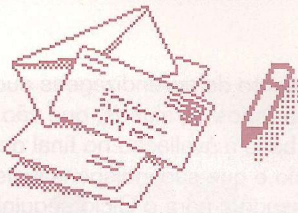


Pontos de vista, reacções, ideias...

Função impossível - parte II

Há algum tempo atrás (revista nº 38) foi deixado em jeito de desafio o problema de esboçar o gráfico de uma função, que um então meu aluno (o Celso) mostrara não ser impossível.

O tempo foi passando, o Celso entretanto já se tornou num caloiro universitário (esperemos que por lá o entendam...), a direcção da revista também acelerou o seu "processo de fabrico", mas como mais vale já que nunca, resolvi voltar ao assunto. Gostaria no entanto de frisar que o que me levou a escrever da primeira vez, não foi o "problema" em si, mas o facto de ter sentido que pela pressa que por vezes temos de chegar... sabe-se lá onde, muito de realmente valioso vai ficando pelo caminho.

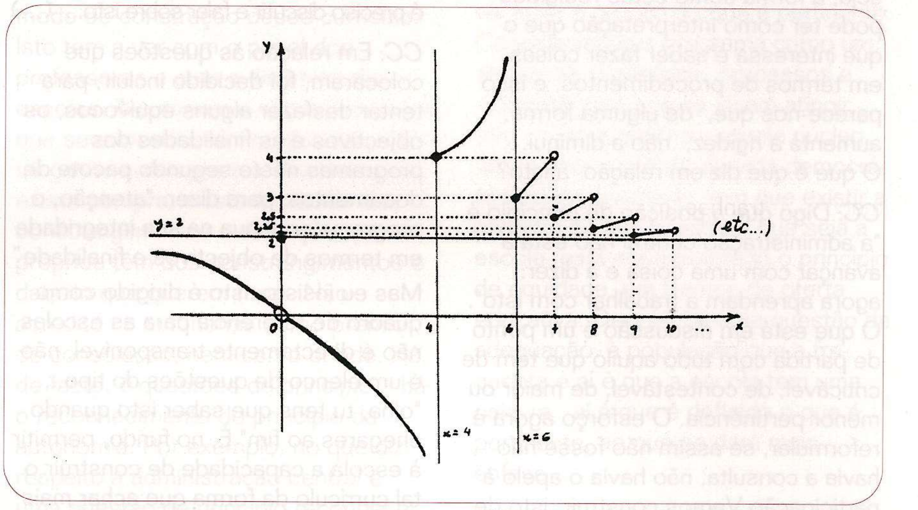
Mas relembremos o problema: tratava-se de esboçar o gráfico de uma função injectiva f que respeitasse cada uma das seguintes condições:

- $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

Quem ainda não pensou no assunto, deve fechar já a revista... É que a beleza do que aí vem, apenas pode ser devidamente apreciada por quem já sentiu "na pele" as dificuldades que o problema levanta; só assim, do meu ponto de vista, poderá apreciar realmente a forma engenhosa como o Celso as venceu. Fica na figura 1 o seu esboço original.

Não falha nada pois não?! O que a mim mais me surpreendeu foi a sua percepção do que é isso de uma função tender para *a*, quando x tende para infinito. Disse-me ele que se lembrara da sucessão $n \to (1/2)^n$ e que ela lhe sugerira a divisão daquele intervalo entre 2 e 4 no eixo OY, infinitamente mas sem "nunca chegar ao 2". A mim, o modo como ele esboçou o gráfico da função, entre 6 e $+\infty$, sugere-me a imagem de uma folha a cair de uma árvore, docemente embalada por um vento que, teimosamente, não a deixa tocar... no solo!

Dado este exemplo, fica arrumado o assunto relativamente aos que acharam ser impossível que tal função existisse (alguns tentaram mesmo provar essa impossibilidade). Entretanto muitos colegas foram comentando comigo possíveis caminhos e, alguns, mostraram-me mesmo os seus "exemplos". Curiosamente, todos incrivelmente parecidos com o do Celso, excepto no que diz respeito à "nova" assimptota vertical que ele desenhou (x=6) e que, de facto, não seria necessária; à direita de 4 a função poderia ter um aspecto do tipo do da fig. 2, e depois, então, "ir caindo"...



Gostaria de salientar alguns dos "colaboradores": o Joaquim, de Arcos de Valdevez, que se mostrou surpreendido com o facto de o Celso se ter "apercebido" de que a função teria que possuir um número infinito de pontos de descontinuidade e de ter conseguido fazê-lo, naquelas condições; o Martinho, que do lado de lá do rio ainda sentia dificuldades em "impôr" a alguns colegas a existência da "sua função"; os professores da U.M., Assis e Lisa, que além da resposta a este problema, deixaram ainda duas sugestões, acrescentando às condições iniciais o seguinte:

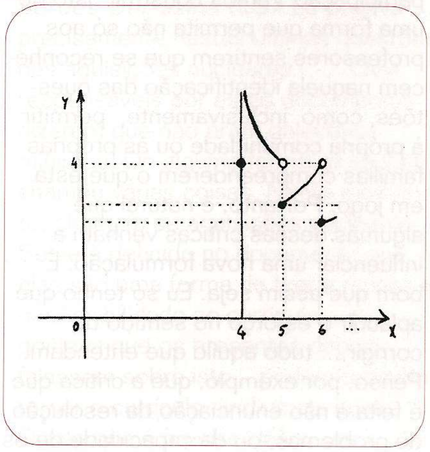
a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = a$

sendo *a* um número real negativo qualquer ou então, ... o que (dizem) complicará (ainda) mais as coisas:

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Penso que esta será uma boa forma de terminar, sobretudo para quem confessou ter a (outra) revista ainda aberta. Vamos a isto?

Mário Roque
Esc. Sec. Francisco de Holanda



Filhos de um deus menor

Tendo acompanhado de muito perto as últimas épocas de exame, não posso deixar de responder à carta da colega Margarida Pinto, publicada no nº39 da revista, assumindo também o papel imaginário de aluna, para referir a situação que mais me incomodou pela injustiça que encerra.

E se um desconhecido, de repente, só fizer ofertas aos outros...

Guida,

li a tua carta e compreendi tão bem o que sentias. Tu não escreves como eu, eu sei, as tuas palavras são profundas, plenas de sentimento, deixam transparecer o teu estado de alma...

Se calhar neste momento tudo o que aconteceu naqueles meses já pertence ao teu passado e estás, também tu, feliz numa qualquer cidade que jamais pensaste visitar, a iniciar um curso que há bem pouco tempo atrás nem sabias que existia. Mas certamente não ignoras, embora talvez não penses nisso, que não é assim com todos nós.

Como já compreendeste as coisas não correram da melhor forma comigo. Falavas na tua carta de algumas situações estranhas, mas isso não é nada comparado com o que se passou comigo e com a minha amiga Rita.

Faltando-nos fazer Matemática (do programa antigo) para concluir o 12º ano e, não estando as coisas a correr da melhor maneira, resolvemos anular a matrícula e propormo-nos a exame. Arranjámos um professor para nos dar umas explicações e, acredita, trabalhámos à doida. Até percebíamos umas coisas e o exame nem correu mal. Depois de alguns dias terríveis, de ansiedade sempre crescente, com notas que não saem quando estava previsto sair, ei-las finalmente. Eu tive 9 e a Rita 7,5. Mas, oh pasmos dos pasmos, eu chumbei e a Rita passou! Como é possível?!

Que sistema de avaliação é este em que um 7,5 é melhor do que um 9?!

Não percebes o que aconteceu? Eu explico! 7,5 é 8 e 8 com uma bonificação de 2 valores é 10, o que se traduz num maravilhoso APROVADO. Certo?

Agora o melhor: o meu esforçado 9 não tem direito a qualquer bonificação porque eu era aluna dum curso técnico-profissional e, ao que parece, esses são... filhos de um deus menor!

Resultado, não conclui o 12º ano e perdi o emprego que tinha prometido, dependente da conclusão do 12º ano.

E se acaso pensas que sou caso único, estás enganada... perdoa-me se de algum modo ensombrei o teu início de ano, mas não resisti ao desabafo. E sabes... não consigo deixar de pensar: e em anos futuros, como será?... Um beijo.

Helena Rocha
Esc. Sec. Patrício Prazeres

Curiosidades matemáticas: algumas dúvidas, algumas certezas...

No JD Nº3 do *ProfMat 96*, Almada, foi divulgado o maior número primo conhecido à data. Trata-se do número $2^{1257787}-1$ com 378632 dígitos, descoberto por Slowinski e Gage e anunciado no dia 3 de Setembro de 1996 pela Cray Research. Porém, no dia 23 de Novembro de 1996, e apenas após 81 dias, o matemático Joel Armengaud anunciou um novo número primo e maior que o anterior. O número em causa é o $2^{1398269}-1$, com 420921 dígitos (sobre o número de dígitos ver [3]), o suficiente para formar um livro com 225 páginas, e é o 35º número de Mersenne[1] primo conhecido.

Mas havendo tantos números de Mersenne compreendidos entre $2^{1257787}-1$ e $2^{1398269}-1$ não poderá, também, algum deles ser primo? A resposta é *talvez*, pois para muitos expoentes menores que 1398269 não se sabe quais os números de Mersenne que são primos ou compostos. Na realidade, embora sendo menores que $2^{1398269}-1$, eles são, no entanto, mais difíceis de testar com os algoritmos existentes. Um dos testes usados é o de Lucas-Lehmer[2], onde podem aparecer valores de s_k "intratáveis" (números demasiado grandes mesmo para os computadores actuais), o que justifica que se tenha a certeza sobre a primalidade de alguns números de Mersenne sem que isso aconteça para outros menores que eles.

Outra questão pode colocar-se: haverá mais números primos entre $a = 2^{1257787}-1$ e $b = 2^{1398269}-1$, não necessariamente primos de Mersenne? A resposta a esta pergunta já é sim, basta ter em atenção o seguinte resultado: "Se n é um número inteiro maior que 1, então entre n e 2 n existe pelo menos um número primo" (ver [2], pág. 145). Para o nosso caso vê-se que o número de primos entre *a* e *b* é superior a 140000.

E é assim a Matemática! A dúvida e a certeza andam sempre a par. Mas não é aí, também, que reside grande parte da sua beleza e mistério?

Esperamos que a publicação destas linhas não demore, pois corremos o sério risco de ficarem desactualizadas!!! Muito sinceramente, até nos apetece "congelar" as folhas "www.mersenne.org/prime.htm" e "www.utm.edu/research/primes/mersenne.shtml"!!!

Manuel Saraiva e Carlos Farias
Univ. da Beira Interior

Referências

[1] - Rosen, K. H. (1993). *Elementary number theory and its applications*. Addison-Wesley, 3ª edição.

[2] - Sierpinski, W. (1988). *Elementary theory of numbers*. North-Holland, 2ª edição.

[3] - Veloso, E. e Viana, J. P. (1994). *Desafios 3*. Edições Afrontamento.

Notas

[1] São números da forma $M_m = 2^m-1$ e o nome é homenagem ao monge francês Marin Mersenne. Excepto durante curto tempo, o maior número primo conhecido foi sempre um número de Mersenne.

[2] Se p é um primo ímpar, o número M_p é primo sse é um divisor do (p-1)-ésimo termo da sucessão $s_1, s_2, s_3, \ldots$ onde $s_1 = 4$, $s_k = s^2_{k-1} - 2$, k=2,3,...