A propósito do Teorema de Pitágoras

Ângela Coimbra

A observação do artesanato africano e a exploração de motivos ornamentais poderá constituir não só um contexto favorável à demonstração do teorema de Pitágoras, a partir de vias algébricas e geométricas, mas também a oportunidade dos alunos trabalharem em situações de carácter lúdico, facilitadoras da flexibilidade do pensamento.

Ao ler a entrevista com Conceição Mesquita, publicada na revista nº 38, nomeadamente quando afirma "gostava que a revista publicasse (...) algumas ideias que não estão na forma como vão ser usadas com os alunos, mas que podemos adaptar...", senti-me motivada para fazer este texto (baseado num trabalho para uma acção de formação), esperando que ele possa contribuir para "nem que seja fornecer dados sobre qualquer assunto interessante, que depois se possa usar..."

No programa de Matemática[1] podemos ler:

> "Actividades com uma perspectiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostram a Matemática como ciência que se constrói e constituem ainda um bom exercício de pesquisa de documentação".

Localizar Pitágoras no seu tempo e abordar, duma maneira simples, aspectos da filosofia pitagórica e da Matemática desta época, pode ser um bom pretexto para realizar um trabalho de carácter interdisciplinar, ou apenas no âmbito da própria disciplina. Os alunos podem recolher alguns elementos relativos à vida de Pitágoras, à importância do número no pensamento pitagórico, ao contributo dos Pitagóricos nos campos da Música e da Acústica e ao célebre Teorema, o mais popular de toda a Matemática.

Parece-nos importante a referência ao conhecimento de alguns casos deste teorema, muito antes de Pitágoras existir, por parte de povos como os Babilónios, os Hindus e os Chineses. Em relação aos Egípcios há autores, como é o caso de Dirk J. Struik[2] e Carl Boyer[3] que afirmam não haver elementos que permitam concluir que este povo conhecia o Teorema de Pitágoras.

Um caso particular do Teorema (triângulo rectângulo isósceles) pode ser abordado usando a obra *Ménon*, de Platão. Para exemplificar a teoria da reminiscência, Sócrates demonstra a Ménon que um seu escravo é capaz de descobrir, por si, como construir um quadrado cuja área é o dobro da de um quadrado dado. O escravo começa por responder que se deve aumentar o lado do quadrado para o dobro e Sócrates faz-lhe ver que então a área passa para o quádruplo. Vejamos um pequeno extracto deste diálogo:

Sócrates: - Não teremos assim quatro espaços iguais?
Escravo: - Sim.
Sócrates: - E todos juntos, quantas vezes são maiores do que este só?
Escravo: - Quatro vezes.
Sócrates: - Mas nós queríamos apenas um espaço duplo, lembras-te?
Escravo: - Efectivamente.
Sócrates: - Estas linhas que vão de um ângulo a outro (diagonalmente) não dividem em dois cada um destes espaços?

E o processo continua, pelo método da maiêutica, até o escravo concluir que o quadrado desejado deve ter por lado a diagonal do quadrado dado.

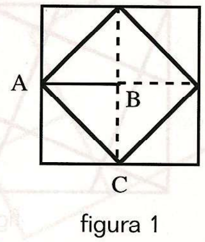


figura 1

Vê-se perfeitamente na figura 1 que o quadrado da hipotenusa do triângulo [ABC] é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Platão e Sócrates não são desconhecidos dos alunos pois na disciplina de História, no 7º ano, é feita referência a estes filósofos, e Pitágoras é apresentado como o "grande nome das ciências gregas"[4].

Parece-nos bastante interessante a forma como são apresentadas por Paulus Gerdes, no seu livro *Pitágoras Africano*[5], demonstrações do Teorema de Pitágoras, a partir de motivos ornamentais africanos.

1º) Botões entrelaçados

"Prendendo um pequeno laço à volta de um botão quadrado entrelaçado, é possível fechar a tampa de um cesto, como é feito comummente no sul de Moçambique." (Gerdes, pág.15)

As figuras 2, 3 e 4 mostram como se começa a entrelaçar o botão, visto de cima, antes e depois de rectificar as linhas e tornar as linhas escondidas visíveis.

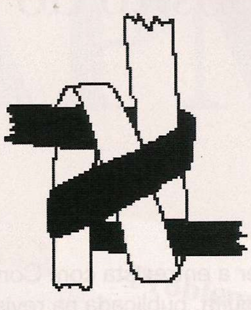


figura 2

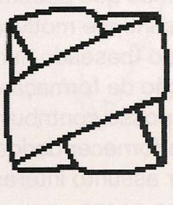


figura 3

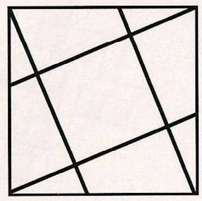


figura 4

No meio aparece outro quadrado (ver figura 4). O professor decidirá se tem interesse provar esta afirmação, conforme a turma em que está a trabalhar. A demonstração pode ser feita usando um caso da igualdade de triângulos e a relação entre elementos de triângulos iguais[6], assuntos que constam do programa do 7º ano.

Juntando alguns botões aparece a figura 5 e apagando alguns dos seus elementos obtém-se a figura 6.

Analisando as figuras 5 e 6 conclui-se que $c^2= a^2+b^2$.

Com base na figura 6 também se pode propor aos alunos que construam um puzzle para demonstrar geometricamente o teorema de Pitágoras. Numa cartolina desenham uma figura semelhante à figura 7 e cortam os quadrados construídos sobre os catetos como mostra a figura 8, obtendo 5 peças que, correctamente montadas, formam o quadrado construído sobre a hipotenusa[7].

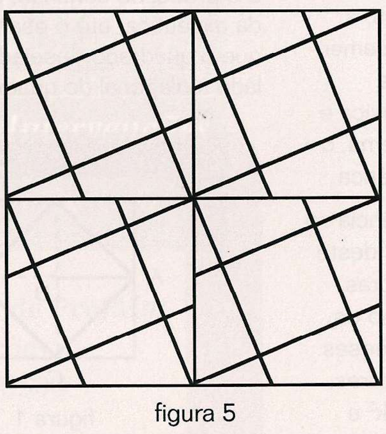


figura 5

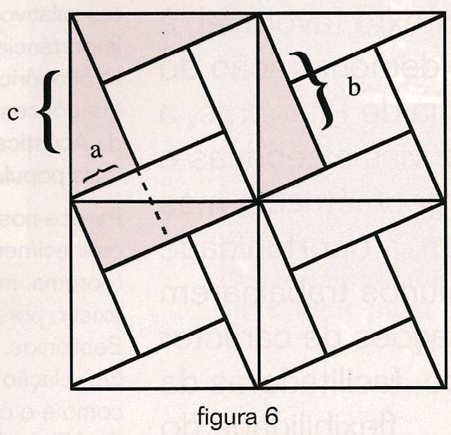


figura 6

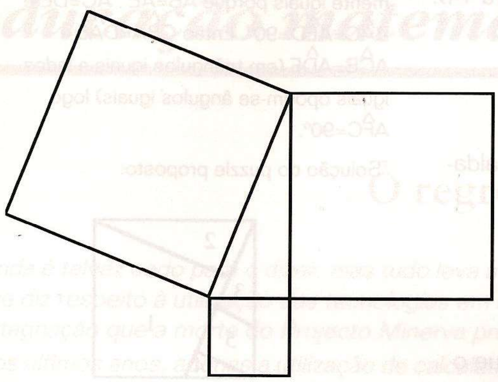


figura 7

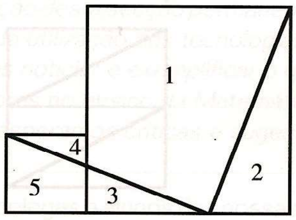


figura 8

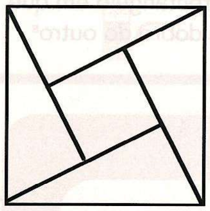


figura 9

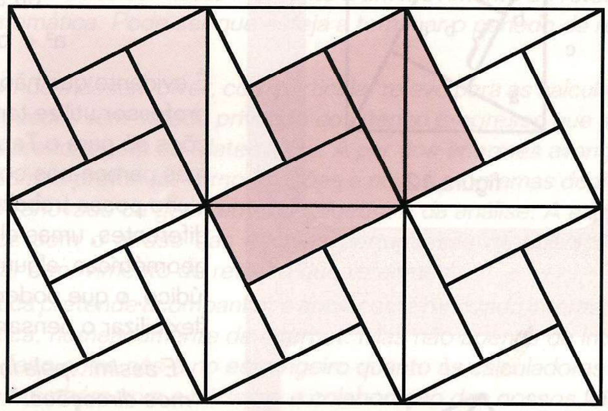


figura 10

2º) Gravura Bakuba

"O povo dos Bakuba habita a parte central da bacia do rio Congo (na actual República do Zaire), vivendo na savana ao sul da densa floresta equatorial. Os Bakuba tinham constituído um reino forte e secular. Famosos são os produtos da metalurgia Bakuba, como punhais, armas e joalharia. As aldeias tinham-se especializado em determinados trabalhos de artesanato, como a fabricação de caixas e taças de madeira ornamentadas, tapetes de veludo, cachimbos de cobre, roupa de ráfia, etc." (Gerdes, p.46)

A figura 9 mostra um padrão a que uma etnia do antigo reino dos Bakuba chama "defesa de elefante", (segundo Gerdes refere, este padrão encontra-se em alguns objectos expostos na exposição permanente "De clãs para civilizações" no museu etnográfico de Budapeste).

Juntando algumas vezes este padrão obtém-se a figura 10.

Comparando nesta última figura, as zonas sombreadas demonstra-se geometricamente o teorema de Pitágoras, como ilustra a figura 11.

No caso de os alunos já terem aprendido os casos notáveis pode-se também sugerir que façam uma demonstração algébrica deste teorema, usando a figura 12.

A área do quadrado central é $(b-a)^2$ e a área dos quatro triângulos é

$4 \times ab/2$ ou seja

$c^2 = (b-a)^2 + 4 \times ab/2$,

logo $c^2 = a^2 + b^2$.

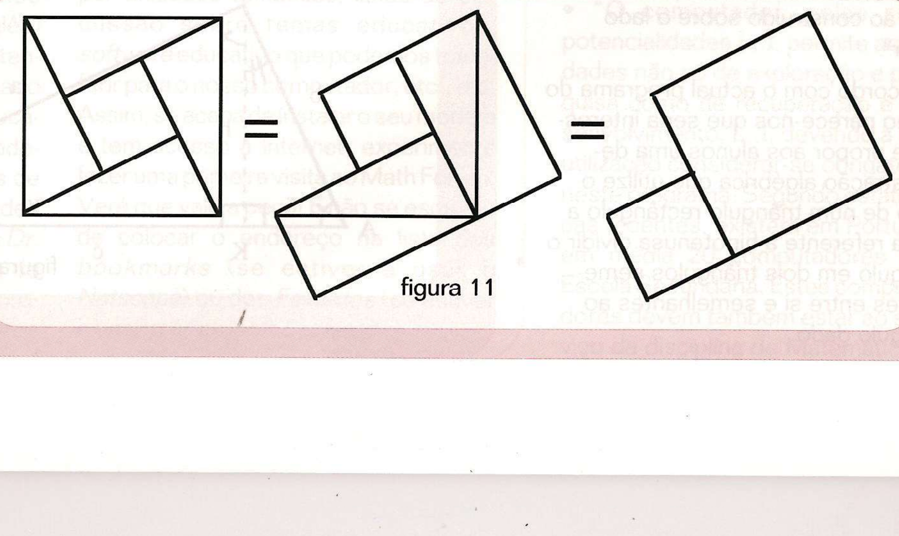


figura 11

Com base na figura 12, pode ser proposto um outro puzzle, considerando um triângulo rectângulo em que um dos catetos é o dobro do outro[8].

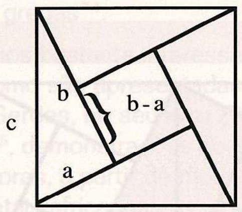


figura 12

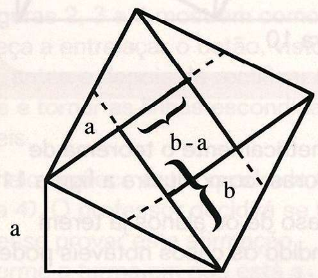


figura 13

Como b-a=a (figura 13), o quadrado interior é igual ao construído sobre o lado menor. Os quatro triângulos rectângulos formam um quadrado igual ao construído sobre o lado maior[9].

De acordo com o actual programa do 8º ano parece-nos que seria interessante propor aos alunos uma demonstração algébrica que utilize o facto de num triângulo rectângulo a altura referente à hipotenusa dividir o triângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo dado.

Uma possível demonstração[10] será comparando os triângulos [AKC] com [ABC] e [BKC] com [ABC] (figura 14).

Então podemos escrever

$$b/x = c/b \text{ e } a/y = c/a$$

logo $b^2 = cx$ e $a^2 = cy$.

Adicionando as duas últimas igualdades membro a membro vem:

$$a^2 + b^2 = c\,(x + y)$$

ou seja,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

É evidente que não se sugere que o professor utilize tantas demonstrações só para o Teorema de Pitágoras mas parece-nos conveniente que o aluno possa trabalhar com situações diferentes, umas algébricas, outras geométricas, algumas com carácter lúdico, o que poderá contribuir para flexibilizar o pensamento.

"E assim...pela indirecção descobrimos direcções."

Shakespeare[11]

Notas

[1]*Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem*, Volume II, Ensino Básico, 3º ciclo.

[2]*História Concisa das Matemáticas*, Dirk J. Struik, Gradiva, 1ª Ed., Lisboa, 1989, pág.55.

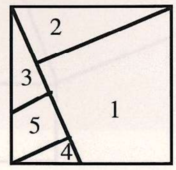
[3]*História da Matemática*, Carl Boyer, Editora Edgard Blucher, 10ª reimpressão, São Paulo, 1993, pág.13.

[4]*Ao encontro da História-7*, Pedro Almiro Neves, Porto Editora, pág. 105.

[5]Instituto Superior Pedagógico, Maputo, 1992.

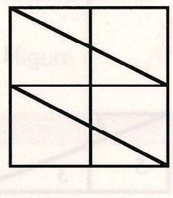
[6]Provemos, por exemplo, que $\widehat{AFC} = 90°$. Os triângulos [ABC] e [ADE] são geometricamente iguais porque $\overline{AB}=\overline{AE}$, $\overline{AC}=\overline{DE}$ e $\widehat{BAC}=\widehat{AED}=90°$. Então $\widehat{CBA}=\widehat{DAE}$ e $\widehat{ACB}=\widehat{ADE}$ (em triângulos iguais a lados iguais opõem-se ângulos iguais) logo $\widehat{AFC}=90°$.

[7]Solução do puzzle proposto:



[8]*La Matematica, La Geometria*, Emma Castelnuovo, La Nuova Italia, Itália, 2ª ed., 1986.

[9]Solução do puzzle proposto:



[10]*The Pythagorean Proposition*, E.S. Loomis, The National Council of Teachers of Mathematics, U.S.A., 1972.

[11]Citado em *Número, a Linguagem da Ciência*, Tobias Dantzig, Editorial Aster, Lisboa.

Ângela Coimbra
Escola Secundária de Ermesinde

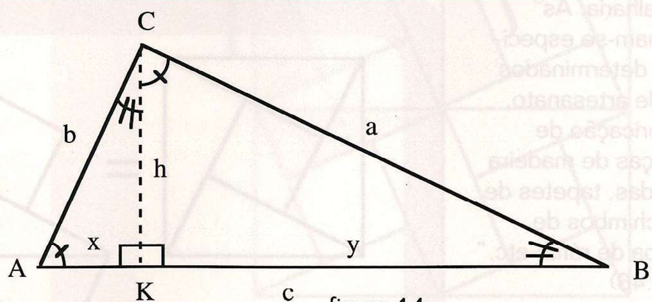


figura 14