O Problema do ProfMat 96

José Paulo Viana

Como vem sendo hábito, realizou-se também no último ProfMat um concurso de resolução de problemas. Foi proposto o problema "Os 12 filhos do senhor Alberto":

O Alberto é um antigo colega meu dos tempos do liceu. Já não o via há muitos anos quando o encontrei por acaso no Algarve. Depois do abraço, seguiram-se as perguntas habituais. Fiquei admiradíssimo quando me disse que tinha 12 filhos.

— E com que idades? — quis saber.

— Olha, como gostas de problemas, vou-te dando informações até tu descobrires. Aqui vai a primeira: têm todos mais que 1 ano e ainda nenhum fez 18.

— Só com isso não vou lá.

— Têm todos idades diferentes excepto dois deles que são gémeos. Além disso, o produto das 12 idades é um cubo perfeito.

Peguei num papel, num lápis e numa calculadora e fiz umas contas.

— Preciso de mais informações, pedi-lhe passado uns minutos.

O Alberto disse-me então qual era a idade do 11º filho.

Mais uns minutos de contas e tive de me lamentar:

— Ainda não é possível chegar à solução.

Foi então que o Alberto me disse a idade do mais novo e eu deixei de ter dúvidas. Já sabia a idade de todos eles.

Que idades têm os 12 filhos do Alberto?

Doze filhos lá em casa
não é tarefa ligeira
o sr. Alberto e esposa
terão grande trabalheira.
Entre dois e dezassete
distribuem-se as idades
mas para mim não é frete
gosto de curiosidades.
Sendo delas o produto
um tal cubo tão perfeito
onze, treze e dezassete
vão-se embora logo a eito.

Assim começava a resposta da Fátima Pedro e da Florinda Costa. E continuava, sempre em verso. Se houvesse prémio de originalidade, ganhavam-no sem qualquer dúvida.

Este ano o número de concorrentes foi o maior de sempre. Houve 41 respostas individuais e 8 colectivas. A resolução mais curta tinha meia página (11 linhas) e a mais longa 11 páginas e meia.

O método de resolução seguido pelos concorrentes foi, com peque-nas variantes, o seguinte.

- Decompor os números de 2 a 17 em factores primos.
- O produto das idades é um cubo perfeito logo, na sua decomposição em factores primos, o expoente de cada primo tem de ser um múltiplo de três. Por isso, as idades 11, 13 e 17 são impossíveis.
- Sobram as idades 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9 ,10, 12, 14, 15 e 16. O produto destes números é $2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

Uma das idades terá de ser repetida, devido aos gémeos.

- As idades 7 e 14 ou saem as duas ou uma delas é repetida para o expoente de 7 ser múltiplo de 3.
- Torna-se necessário agora fazer a listagem dos casos possíveis. Tem de se ter cuidado para não esquecer nenhuma hipótese.

Vários concorrentes não tiveram a resolução completamente certa por terem esquecido um ou outro caso.

Se não houver filhos com 7 e 14 anos, terá de se repetir o 2 ou o 16 e as possibilidades são:

A) 2-2-3-4-5-6-8-9-10-12-15-16

B) 2-3-4-5-6-8-9-10-12-15-16-16.

Se os gémeos tiverem 7 anos há três possibilidades:

C) 3-5-6-7-7-8-9-10-12-14-15-16

D) 2-4-5-6-7-7-8-10-12-14-15-16

E) 2-3-5-6-7-7-8-9-10-12-14-15

Se os gémeos tiverem 14 anos também há três possibilidades:

F) 3-4-5-6-7-9-10-12-14-14-15-16

G) 2-3-4-5-7-8-10-12-14-14-15-16

H) 2-3-4-5-6-7-9-10-12-14-14-15

- As possíveis idades do 11º filho são 2 (um caso), 3 (quatro casos), 4 (dois casos) e 5 (um caso). Como saber a idade do 11º filho não permite resolver o problema, então ele não tem 2 nem 5 anos. Eliminam-se os casos A e C.
- Ao saber-se a idade do 12º filho foi possível resolver o problema. Então, os dois mais novos não podem ter 2 e 3 anos porque há quatro casos em que isso acontece: B, E, G e H. Eliminam-se estes casos.
- Sobram as hipóteses D e F.

O problema tem portanto duas soluções. As idades dos filhos do sr. Alberto são:

2-4-5-6-7-7-8-10-12-14-15-16 ou

3-4-5-6-7-9-10-12-14-14-15-16.

O Augusto Taveira seguiu um processo de resolução diferente deste, analisando simultaneamente as idades poss'veis para os dois filhos mais novos.

A Ana Esteves, a Cláudia Santos e a Cristina Ramos apresentaram a solu≠‹o mais bonita, com os doze filhos em papel recortado.

A resolução do Alberto Teixeira era em forma de investigação policial, incluindo os comentários do detective. A Ilda Rafael começa por dar nomes invulgares aos doze filhos do Alberto. A Margarida Graça afirma que "falar na calculadora, para além de dar um ar moderno ao problema, serve para despistar alguns mais ingénuos que, como eu, pegam logo na máquina". Finalmente, o conselho da Cilene Lindinho e da Anabela Lemos: "Alguém tem de dar urgentemente ao Alberto uma caixa de preservativos ou inscrev◊-lo num curso de forma≠‹o cont'nua sobre planeamento familiar".

José Paulo Viana
E. S. Vergílio Ferreira,
Lisboa

PRÉMIOS

1º Maria Paula Félix Ferreira, calculadora gráfica TI-92

2º António Miguel da Mata, calculadora gráfica CFX-9850G

3º Sérgio Valente, calculadora gráfica TI-80

4º Eneida Campanhã, Eduarda Santos e Francisca Sousa, jogo Abalone

5º José Manuel Duarte, jogo Rummix

6º Augusto Taveira, jogo Quads

7º Cilene Lindinho e Anabela Lemos, livro "Desafios 5"

Os prémios foram oferecidos pela Texas Instruments, pela Beltrão Coelho (Casio), pela Ludomania e pelas Edições Afrontamento.

Os concorrentes devem contactar com a sede da APM a fim de os receberem.

Concorrentes individuais:

Alberto Teixeira, Ana Cristina Martins, Ana Cristina Pereira, Ana Luísa Correia, Ana Teresa Veiga, António Bernardes, António Guerreiro, António Mata, Augusto Taveira, Carlos Manuel Grosso, Cecília Lourenço, Célia Carapuço, Conceição Valente, Cristina Piedade, Eduarda Moura, Fátima Coelho, Fausto Silva, Fernando Sobral, Idália Pesquita, Ilda Rafael, Isabel Barral, Isabel Brandão, Isabel Marques, Isabel Monteiro Silva, Isabel Ramada, Isabel Rosas, Isabel Viana, João Francisco Branco, José M. Duarte, Lurdes Solústio, Margarida M. da Graça, Margarida Pinto, Mª João Peres, Mª José Santos, Paula Ferreira, Paulo Saraiva, Sérgio Macias Marques, Sérgio Valente, Silvéria Sabugueiro, Sylvie Marques, Vidal Minga.

Concorrentes colectivos:

Albino Pereira e Sandra Moreira

Ana Cristina Esteves, Cláudia Santos e Cristina Ramos

Cecília Costa e Luisa Pinto

Cilene Lindinho e Anabela Lemos

Eneida Campanhã, Eduarda Santos e Francisca Sousa

Fátima Pedro e Florinda Costa

Fátima Barroso e Ilda Lopes

Jacinto Salgueiro e Luis Miguel Ferreira.

O problema deste número

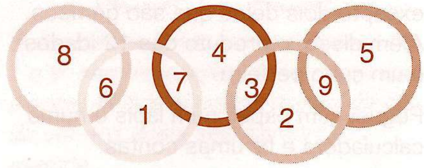
(continuação da pág. 28)

• Qual é a solução em que a soma S é máxima?

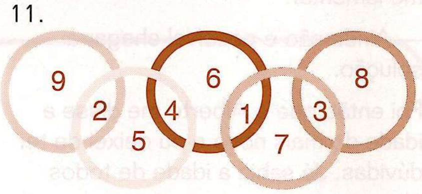
Chegaram apenas três respostas, todas do Alentejo: do Paulo Correia (a quem quase poderemos atribuir o título de "respondedor oficial"), do José Francisco Códices (Évora) e do Romeu Vieira da Silva (Beja). Como habitualmente, o Paulo chegou à solução com o apoio do computador. A vantagem de ter seguido este método foi ter encontrado todas as soluções possíveis, que afinal não são muitas, como se afirmava no enunciado, mas apenas quatro: uma com soma 11, duas com 13 e uma com 14.

O Romeu "beneficiou" primeiro da ajuda de Fernando Nifrário e depois fez um prgrama em Turbo Pascal.

O José Francisco mostra que para a soma ser 15, os quatro maiores números têm de ficar nas pontas. Mas se fizermos, por exemplo A=6, B=9, H=8 e I=7, não é possível colocar os outros números. Logo, a soma 15 é impossível. O máximo é 14, como se pode ver na figura.



Para a soma mínima, se quisermos que ela seja 10, os dois maiores números têm de ficar nos extremos: A=9 e I=8. Verifica-se depois que não se consegue mantê-la para os anéis intermédios. Então a soma mínima é 11.



Nota: Dada a alteração da periodicidade da *Educação e Matemática*, os colegas interessados em enviar as suas resoluções do problema proposto devem fazê-lo no prazo de um mês após a saída da revista.

José Paulo Viana
E. S. Vergílio Ferreira, Lisboa