O problema das embalagens premiadas

José Paulo Viana

No ano passado, no exame de 2ª chamada do 12º ano apareceu um problema de probabilidades que deu lugar a muitas discussões. Muitas pessoas me falaram nele, muitos foram os telefonemas que recebi levantando questões sobre as possíveis maneiras de o resolver. A certa altura, o Pedro Moura sugeriu mesmo que se escrevessem e publicassem na nossa revista todas as resoluções conhecidas.

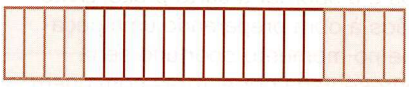
O problema é este:

Um comerciante foi informado de que tem 4 embalagens premiadas entre as 20 que adquiriu de um certo produto, mas não sabe quais são. Dispondo as 20 embalagens em fila, na montra, por uma ordem qualquer, qual [é] a probabilidade de que as embalagens premiadas fiquem todas juntas no início ou no fim da fila?

Como acontece com muitos problemas, também neste existem diferentes processos de o resolver. Eu consegui descobrir quatro, mas é possível que haja mais. Antes de começar, contudo, convém fazer uma nota preliminar.

Para calcular uma probabilidade aplicando a definição de Laplace, devemos dividir o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. O principal cuidado a ter é usar exactamente o mesmo método na contagem dos casos favoráveis e na contagem dos casos possíveis. Além disso, a experiência mostra-me que é mais seguro começar pelos casos possíveis e só depois passar aos favoráveis.

Vamos então a isto. Para ajudar, admitamos que os vinte lugares na montra estão numerados de 1 a 20.



1º processo

Vamos pensar apenas nas quatro embalagens premiadas e considerá-las indistinguíveis entre si. Elas vão ocupar quatro dos vinte lugares da montra (e não nos interessa de que forma as embalagens não premiadas irão ocupar os lugares deixados livres pelas premiadas). Os casos possíveis correspondem às diferentes maneiras de colocar as 4 embalagens nos 20 lugares, sem preocupações de ordem. São portanto as combinações de vinte, 4 a 4.

Casos favoráveis: ou as embalagens premiadas ficam nos lugares 1, 2, 3 e 4, ou então em 17, 18, 19 e 20, novamente sem preocupações de ordem. Há portanto apenas 2 casos favoráveis.

$$P = \frac{2}{C_4^{20}} = \frac{2}{4845}$$

2º processo

Novamente vamos considerar apenas as embalagens premiadas, mas agora preocupar-nos-emos com a ordem com que elas aparecem na montra (e continuamos a ignorar as embalagens não premiadas).

Casos possíveis: correspondem às diferentes maneiras de colocar as 4 embalagens premiadas nos 20 lugares. Como agora a ordem é importante, são os arranjos de 20, 4 a 4.

Casos favoráveis: as embalagens premiadas podem ficar nos lugares 1 a 4, podendo fazer entre si todas as permutações porque a ordem interessa, ou nos lugares 17 a 20, de novo com todas as permutações. Os casos favoráveis são então duas vezes as permutações de 4.

3º processo

Desta vez vamos considerar todas as embalagens, premiadas ou não.

Casos possíveis: correspondem às diferentes formas de colocar as 20 embalagens nos 20 lugares da montra. São portanto as permutações de 20.

Casos favoráveis: há duas possibilidades a considerar.

$$P = \frac{2 \times P_4}{A_4^{20}} = \frac{2 \times 24}{116280} = \frac{2}{4845}$$

Se as premiadas ficarem nos lugares 1 a 4, podem permutar entre si (permutações de 4) e as 16 não premiadas também podem permutar entre si (permutações de 16).

O mesmo se passa se as premiadas ficarem nos quatro últimos lugares: permutações de 4 vezes permutações de 16.

$$P = \frac{2 \times P_4 \times P_{16}}{P_{20}} = \frac{2}{4845}$$

4º processo

Desta vez vamos calcular primeiro a probabilidade de as quatro embalagens premiadas ficarem nos quatro primeiros lugares, considerando que se colocam as embalagens uma a uma.

O comerciante vai colocar a primeira embalagem. A probabilidade de ela ser premiada é de 4 em 20. O comerciante vai agora pôr a segunda embalagem. Das 19 que lhe sobram, só 3 são premiadas. A probabilidade de ser uma premiada é de 3 em 19. Quando passa para a terceira, a probabilidade de ela ser premiada é de 2 em 18. Finalmente, para o quarto lugar já só há uma premiada nas 17.

Portanto, a probabilidade de nos quatro primeiros lugares só ficarem as premiadas obtém-se multiplicando as probabilidades destes quatro acontecimentos. A probabilidade de as premiadas ficarem nos quatro últimos lugares é exactamente a mesma. Portanto:

$$P = 2 \times \frac{4}{20} \times \frac{3}{19} \times \frac{2}{18} \times \frac{1}{17} = \frac{2}{4845}$$

Perguntas e comentários

É normal haver vários processos para resolver um problema de probabilidades? Normalíssimo! E, quanto a mim, ainda bem.

Em algumas situações, a ordem com que os objectos aparecem disposto é importante e então há menos maneiras de resolver o problema. Se usarmos o cálculo combinatório temos de pensar sempre em termos de "arranjos".

Noutras situações, a ordem de alguns dos objectos (ou de todos) não é determinante, como acontecia no problema das embalagens. Nestes casos pode-se fazer a análise quer entrando em linha de conta com a ordem (usando "arranjos"), quer não entrando (usando "combinações").

Em certos problemas pode também subdividir-se a situação em várias "partes" independentes, analisando-se separadamente cada parte. Foi o que se fez no 4º processo do nosso problema.

Qual é o melhor processo? Todos são bons, evidentemente. Não há nenhum melhor. Cada pessoa utiliza o que lhe der mais jeito... Não se pode é mudar de processo a meio da resolução. Por curiosidade posso dizer que o meu preferido é o último!

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Lisboa)

Materiais para a aula de Matemática

Neste número apresentamos uma proposta que nos foi enviada pela colega Maria Guilhermina Nogueira. Para realizar a ficha de trabalho utilizada, os alunos, com os triângulos distribuídos, vão construindo sucessivamente as figuras 0, 1, 2 etc, tal como se ilustra aqui ao lado.

Juntamente com a ficha, a colega enviou-nos um texto de que a seguir se publicam alguns extractos.

figura 0 figura 1 figura 2

Quando conversando com uma amiga acerca da dificuldade de motivar os alunos para assuntos velhos dos programas de Matemática, ela me perguntou se seria possível falar de fractais a miúdos do 2º ciclo (...) eu respondi de imediato que não sabia e que não seria capaz, pois nunca tinha trabalhado com alunos daquele nível.

Passou um largo período de tempo e um dia, não sei a que propósito, lembrei-me da pergunta da minha amiga e comecei a encará-la como um desafio, sentindo crescer cada vez mais a curiosidade sobre como seria preparar e realizar uma actividade com aqueles alunos (...).

Depois de me inteirar junto da minha amiga sobre os conteúdos já abordados e a abordar a curto prazo, deitei mãos à obra preparando uma peça que no momento oportuno seria representada por actores com quem nunca tinha trabalhado.

No dia combinado com a minha amiga (...) lá fui falar de ritmos cardíacos, rios e fluentes, extinção e propagação de espécies, previsões meterológicas, cristais de gelo, flocos de neve, couves-flor, etc, como ponto de partida para o conhecimento de estruturas de uma geometria diferente (...).

Preparei uma sessão de trabalho para três horas (insuficientes) em que, (...) os alunos se envolveram em actividades de construção, exploração, experimentação e generalização que os entusiasmaram e motivaram para continuar o trabalho nas aulas de Matemática.

(...) Resta acrescentar que durante aquelas três horas tive a sensação de participar numa espécie de maratona, tal era o fervilhar de perguntas e respostas, de correrias e exclamações. Enfim, de vida.

Maria Guilhermina Nogueira
E. Sec. Almeida Garret, V.N. de Gaia