Descartes, geómetra acidental[1]

A . J. Franco de Oliveira

Para Descartes, cidadão do mundo, nada havia de mais importante para garantir a veracidade dos conhecimentos do que o escrutínio crítico do pensamento: "Nunca devemos deixar-nos persuadir da verdade de uma coisa a não ser através da evidência da razão". O racionalismo cartesiano não é tudo nesta vida, mas a "dúvida sistemática" é um bem indispensável no mundo moderno em que persistem o obscurantismo, a fraude intelectual e política e os atropelos da ética.

Introdução

No começo do século XVII assistiu-se a um crescendo da actividade matemática e da sua divulgação, entre pares (por correspondência) e em diferentes níveis de ensino, graças ao uso crescente da imprensa escrita. As ideias de um matemático eram transmitidas rapidamente a outros matemáticos e eram por estes comentadas, criticadas e generalizadas. Enquanto Girard Desargues (1591-1661) e Blaise Pascal (1623-1662) iniciavam os primeiros passos no campo da geometria projectiva, Descartes e Fermat concebiam as ideias essenciais sobre a geometria analítica. Há uma diferença fundamental entre as duas geometrias, pois a primeira é por natureza um ramo novo das matemáticas, enquanto a segunda se afirma sobretudo como um *método* novo em geometria, trazendo para esta os algoritmos da álgebra.

A ideia básica da geometria analítica é a representação de curvas geométricas por equações algébricas, mas dizer isto não é suficiente para caracterizar as contribuições de Fermat e Descartes, reconhecidos como os fundadores da geometria analítica.

De facto, é sabido que os gregos desenvolveram bastante a chamada "álgebra geométrica", utilizando figuras geométricas simples e suas áreas para estabelecer identidades algébricas. Menecmo (c. 350 a.C.) terá sido o primeiro a ter a ideia de descrever curvas por equações, sob forma um tanto incipiente. É sua a descoberta das secções cónicas, e uma solução analítica do problema da duplicação do cubo — construção de $\sqrt[3]{2}$ — como intersecção de uma parábola e uma hipérbole. O estudo das cónicas por Apolónio utiliza na essência os equivalentes geométricos de equações cartesianas das cónicas. A ideia de coordenadas não é totalmente estranha aos egípcios, gregos e romanos antigos, especialistas em levantamentos topográficos e desenho de mapas geográficos e astronómicos, como é o caso de Hiparco (c. 150 a.C.). O que falta aos geómetras gregos é a inclinação e a técnica para manipular as equações de modo a poder extrair informações sobre as curvas, o que não admira: no tempo de Apolónio de Perga (262-190 a.C.), uma equação é descrita por palavras, em cerca de meia página de texto, não sendo por isso fácil chegar a um conceito geral de equação, função ou curva analítica.

No século XIV, Nicolau Oresme (c. 1323-1382) antecipou outro aspecto da geometria analítica, ao representar certas leis físicas, por exemplo, a velocidade como função do tempo, por um gráfico ladeado por dois eixos, um para a variável independente, que designou de *longitude*, e outro para a variável dependente, a *latitude*. A novidade em Oresme é o sistema de coordenadas *antes* de determinar a curva. A ideia de utilizar a álgebra em questões do cálculo é de François Viète (1540-1603), mas o grande impulso é dado por Descartes e Fermat com o seu novo método, tirando partido decisivo dos avanços entretanto verificados na manipulação simbólica da álgebra e tratando das equações com a generalidade que a simbologia algébrica moderna permite.

Na geometria analítica moderna utilizam-se sistemas de coordenadas para posicionar pontos, digamos no plano (euclidiano), quer dizer, determinar (ou "identificar") um ponto P do plano por (com) um par ordenado de números reais (x, y), as coordenadas do ponto referidas a um par de eixos coordenados. Assim, torna-se possível descrever uma curva geométrica no plano por uma equação $f(x,y)=0$ e, reciprocamente, toda a equação deste tipo representa uma curva, constituída por todos os pontos $P=(x,y)$ tais que $f(x,y)=0$, o chamado *gráfico* da curva. Propriedades analíticas e algébricas da equação hão-de corresponder a propriedades geométricas da curva correspondente, e vice-versa. Uma propriedade geométrica da curva há-de ser estabelecida por via da álgebra ou da Análise. Os algoritmos algébricos vêm em socorro das intuições analógicas. Presumivelmente, estas poderão sempre reduzir-se àqueles...

Fermat e Descartes

Os historiadores modernos apontam o ano de 1637 como o do nascimento da geometria analítica, filha de René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). A invenção não foi, em si mesma, muito difícil, atendendo aos antecedentes, mas foi fundamental para os progressos posteriores em geometria e álgebra. A obra de Fermat que explica o novo método, *Ad locos planos et solidos isagoge* [*Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos*] terá sido iniciada em 1629 e concluída em 1636, de acordo com correspondência trocada com Marin Mersenne (1588-1648) e Giles Persone de Roberval (1602-1675), mas só foi publicada postumamente em 1679. No ano de 1637 Descartes concluía a revisão das provas tipográficas do *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* [*Discurso sobre o método para orientar a razão e buscar a verdade nas ciências*], acompanhado de três Anexos ou Apêndices, o último dos quais intitulado *La géometrie* [*A geometria*], escrito com a intenção de ilustrar as considerações filosóficas gerais do *Discurso* relativas ao método científico.

Fermat e Descartes terão elaborado os seus trabalhos independentemente um do outro, sendo por isso um tanto surpreendente que tivessem ambos como ponto de partida o mesmo problema geométrico clássico, nomeadamente, uma solução analítica do problema das três ou quatro rectas de Apolónio e, por outro lado, tivessem ambos reconhecido, como ponto alto das suas investigações, que os gráficos planos das equações do segundo grau são exactamente as cónicas. Até este ponto Fermat é mais sistemático do que Descartes, mas enquanto o primeiro interrompe aí as suas pesquisas, deixando para os vindouros o desenvolvimento do assunto, Descartes desenvolve o estudo de equações de grau superior, exibindo invejável mestria no manejo de métodos algébricos em geometria. Todavia, o estilo d'*A Geometria* não é o de uma exposição sistemática, com explicações e demonstrações pormenorizadas, mas antes o de um relatório descritivo e soberbo das suas descobertas, de leitura não muito fácil. O excesso de vaidade e autoconfiança leva-o, por vezes, a pisar o risco da imprudência, quando afirma, por exemplo,

> as razões entre linhas rectas [segmentos] e curvas não são conhecidas, e creio que não poderão ser descobertas pela mente humana.

Estava aqui referindo-se à determinação do comprimento de um arco de curva, questão que acabaria por ceder ao poder do cálculo infinitesimal que haveria de ser desenvolvido passadas poucas décadas. No final do trabalho escreve

> E espero que a posteridade me julgue com benevolência, não apenas pelas coisas que expliquei, como também por todas aquelas que intencionalmente omiti, a fim de não retirar a outros o prazer de figurarem por si próprios a explicação.

Somente passados mais de cem anos sobre a edição revista d'*A Geometria* publicada em 1659-1661 é que a geometria analítica adquiriu a forma familiar que possui nos nossos dias.

Os termos coordenadas, abcissa e ordenada utilizados modernamente foram introduzidos por Gotfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

A Geometria de Descartes

A Geometria é a única obra matemática publicada de Descartes, ocupando cerca de cem páginas do *Discurso*. Divide-se em três partes. A primeira procura explicar alguns dos princípios da "álgebra geométrica" e representa já um avanço significativo em relação aos matemáticos helénicos. Descartes começa por afirmar que

> todo o problema em geometria pode ser reduzido a termos tais que o conhecimento dos comprimentos de certas linhas [segmentos] é suficiente para a sua construção.

Ora, as operações aritméticas básicas são adição, subtracção, multiplicação, divisão e extracção de raizes quadradas. Em geometria, tendo fixado uma linha [segmento] para unidade, podem-se definir cinco operações sobre segmentos correspondentes às cinco operações aritméticas. Para os gregos, uma variável numérica representa sempre um comprimento de um segmento, um produto de duas variáveis é uma área rectangular, um produto de três é um volume paralelepipédico. Não para Descartes. Por exemplo, para multiplicar dois comprimentos $x = BD$ e $y = BC$, tomando AB como unidade, basta ligar os pontos A e C e tirar por D uma paralela DE a CA, sendo $BE = xy^2$ o produto pretendido (pelo conhecido teorema de Tales (fig. 1). Por outras palavras, o produto $z = xy$

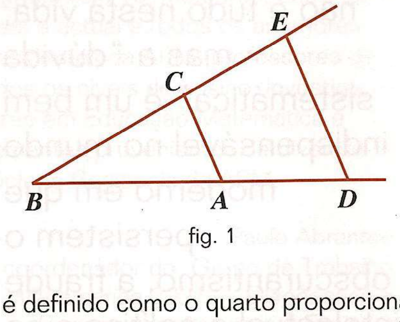


fig. 1

é definido como o quarto proporcional (construtível com régua e compasso) na proporção

$$u : x = y : z,$$

onde u é a unidade. Analogamente, o quociente $y = \frac{z}{x}$ é o terceiro proporcional na proporção acima. Escolhida uma unidade, podemos assim representar por um segmento qualquer potência de uma variável, um produto de duas ou mais variáveis ou um quociente e efectuar a construção respectiva com instrumentos euclidianos, de cada vez que às variáveis são atribuídos valores determinados. Para a extracção de raiz, $z = \sqrt{x}$, a construção é como segue. Dado $x = AB$, prolonga-se com a unidade $u = BC$, divide-se AC ao meio, traça-se a semicircunferência com diâmetro AC e tira-se o segmento perpendicular BD, cujo comprimento é a solução pretendida (por conhecidos teoremas euclidianos, nomeadamente, os teoremas de que ΔACD é rectângulo em D e BD divide aquele em dois triângulos semelhantes).

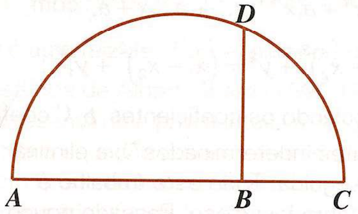


fig. 2

Denotando segmentos por a, b, ..., os resultados das operações são denotados

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ \frac{a}{b},\ \sqrt{a}.$$

Isto configura uma "aritmetização" da geometria, que Descartes mais adiante complementa com sistemas de coordenadas: marcando x num eixo, e, noutro eixo com certa inclinação relativamente ao primeiro, marcando y, o problema típico é determinar todos os pontos cujas coordenadas x, y satisfazem uma dada relação. Se a relação for, por exemplo, $y = x^2$, então para cada valor de x pode-se construir o valor correspondente de y como o quarto proporcional na proporção $u : x = y : z$. As "coordenadas cartesianas" são modernamente entendidas como coordenadas ortogonais, mas este caso nunca é objecto de atenção especial por Descartes.

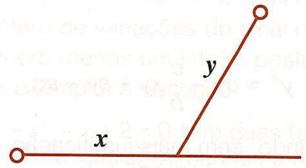


fig. 3

De seguida, Descartes mostra, com a sua técnica, como resolver geometricamente (obtendo soluções positivas) as equações $z^2 = az + b^2$, $z^2 = -az + b^2$, $z^2 = az - b^2$. Para a primeira, por exemplo, ele constrói o triângulo rectângulo ΔNLM com $LM = a$ e $LN = \frac{1}{2}a$ (fig. 4). Prolongando a hipotenusa até O, com $NO = NL$, e construindo a circunferência com centro em N e raio NO, conclui que a solução z é OM, pois o valor de z é dado por

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

Sob as mesmas condições, MP é a, solução de $z^2 = -az + b^2$; se MQR for paralelo a LN, então MQ e MR são as duas soluções de $z^2 = az - b^2$.

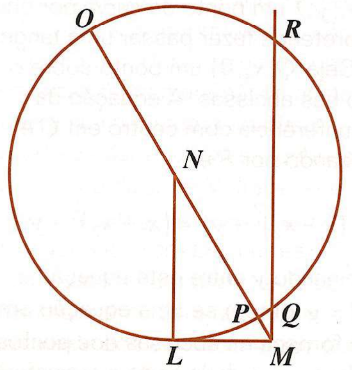


fig. 4

A concluir a primeira parte, Descartes aborda o problema das três ou quatro rectas de Apolónio, que também foi resolvido e generalizado por Fermat.

De acordo com o historiador Papo de Alexandria (c. 300 a.C.) Euclides e Apolónio tentaram, sem êxito, resolver o "problema das três ou quatro rectas", o que levou Descartes a tentar a sua sorte com os novos métodos.

Vejamos um caso do problema das quatro rectas. O problema é o de determinar todos os pontos C tais que, tirando de C quatro segmentos com inclinação dada para quatro rectas dadas, digamos AB, AD, EF e GH, os quatro segmentos CB, CH, CF e CD, respectivamente, satisfaçam a condição de o produto de dois (comprimentos) deles esteja numa proporção dada com o produto dos outros dois, digamos

$$CB.CD = \alpha.CF.CH \qquad (1)$$

Descartes introduz aqui as coordenadas, com vista a simplificar as coisas, chamando x ao comprimento de AB e y ao comprimento de CB, sendo C um ponto genérico do lugar geométrico a determinar. Relativamente a estas coordenadas, mostra de seguida que os comprimentos a determinar CB, CH, CF e CD são funções lineares de x e y. Por exemplo, como os ângulos do ΔARB são conhecidos (fig 5), a razão $BR : AB = b$ também é conhecida, donde $BR = bx$ e $CR = y + bx$. Como os ângulos do ΔDRC são conhecidos, também o é a razão $CD : CR = c$, donde $CD = cy + bcx$. Analogamente, pondo $AE = k$ e $AG = l$ e sendo conhecidas as razões $BS : BE = d$, $CF : CS = e$, $BT : BG = f$ e $CH : TC = g$, obtém-se $BE = k + x$, $BS = dk + dx$, $CS = y + dk + dx$, $CF = ey + dek + dex$, $BG = l - x$, $BT = fl - fx$, $CT = y + fl - fx$, e finalmente $CH = gy + f\,lg - fgx$. Resulta que a equação (1) que representa o lugar geométrico pretendido é uma equação quadrática em x e y. Para cada valor de x (ou de y) valor correspondente de y (de x) pode ser obtido resolvendo uma equação quadrática e, assim, diz Descartes, podem ser construídos tantos pontos do lugar geométrico quantos se queira.

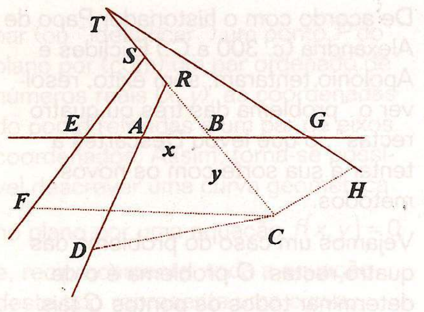


fig. 5

Na segunda parte da Geometria, Descartes regressa a este problema para mostrar que o lugar geométrico assim descrito é uma cónica, possivelmente degenerada numa linha recta.

Em geral, a questão que mais ocupa Descartes na *Geometria* é a construção de pontos que são soluções de problemas geométricos. Para isso houve que decidir que tipos de curvas são legitimamente construtíveis. As mais simples são as construtíveis com os instrumentos euclidianos — a régua e o compasso — mas é sabido que os gregos utilizaram também, por vezes, outros instrumentos e curvas, como as cónicas e algumas curvas transcendentes, como a quadratriz de Hípias (para resolver o problema da trissecção do ângulo). Descartes decide aceitar como legítimos os instrumentos euclidianos, fornecidos pelos postulados 1 e 3 dos Elementos de Euclides e, ainda, as curvas descritas da seguinte maneira: «Duas ou mais linhas podem-se mover [continuamente] uma sobre a outra determinando, pelos pontos de intersecção, outras curvas.» Para gerar tais curvas descreveu diversos instrumentos ou máquinas como, por exemplo, o da figura 6.

A régua *GL* tem um pivot em *G* e uma anilha movível em *L*, acoplada a uma peça *CNKL* que permite que L se desloque ao longo da recta fixa *AB*, mantendo sempre *KN* paralelo a si mesmo. A intersecção variável *C* das linhas móveis *GL* e *KN* gera a curva. Pondo $CB = y$, $BA = x$ e definindo as constantes $GA = a$, $LM = a$ e $NL = c$, Descartes mostrou que $BK = (b/c)y$, $BL = (b/c)y - b$ e $AL = x + (b/c)y - b$; como $CB : BL = GA : AL$, obtém a equação

$$\frac{ab}{c}y - ab = xy + \frac{b}{c}y^2 - by,$$

donde

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

concluindo, sem mais justificação, que se trata de uma hipérbole.

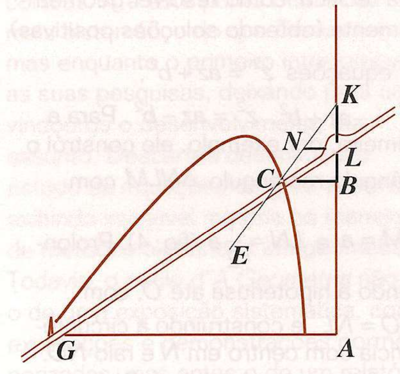


fig. 6

Modificações deste instrumento permitiram a Descartes obter, na terceira parte da Geometria, algumas curvas de ordem superior.

A segunda parte contém também um interessante método para construir tangentes a curvas (v. fig. 7). Seja $f(x,y) = 0$ a equação da curva e $P(x_1, y_1)$ um ponto da curva por onde se pretende fazer passar uma tangente. Seja $Q(x_s, 0)$ um ponto sobre o eixo das abcissas. A equação da circunferência com centro em *Q* e passando por *P* é

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2$$

Eliminando *y* entre esta equação e $CB = y$ obtém-se uma equação em *x* que fornece as abcissas dos pontos onde a curva dada corta a circunferência. De seguida determina-se x_2 de tal modo que esta equação tenha uma raiz *dupla* igual a x_1. Esta condição determina *Q* como a intersecção do eixo das abcissas com a normal à curva em *P*, visto a circunferência e a curva serem agora tangentes em *P*. Construída a circunferência, fácil é obter a tangente em *P*.

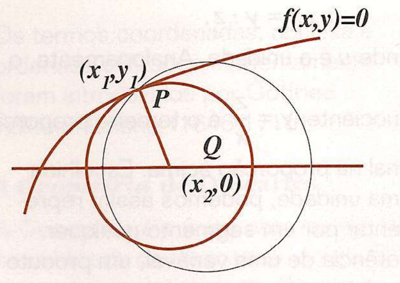


fig. 7

Este método é aplicado por Descartes para construir tangentes a diversas curvas mas, em casos mais complicados, os cálculos algébricos envolvidos podem-se tornar proibitivos. Descartes não determina as condições gerais para uma equação algébrica (polinomial) $a_0x^n + ... + a_n = 0$ possuir uma raiz dupla *r*. Nos exemplos que apresenta limita-se a igualar termo a termo o polinómio

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ com

$$(x - x_2)^2 + y^2 = (x_1 - x_2)^2 + y_1^2$$

calculando os coeficientes b_i ("coeficientes indeterminados"), a eliminar de seguida. Todo este trabalho é bastante fastidioso. Passado pouco tempo, o método das tangentes de Descartes viria a ser suplantado pelo de Fermat.

A terceira parte do trabalho que vimos descrevendo diz respeito a soluções de equações de grau superior a dois dizendo, por isso, mais respeito à álgebra do que à geometria. Tais equações aparecem, invariavelmente, associadas a curvas "geométricas" ou definidas geometricamente (cujos pontos seriam construídos por movimento contínuo de uma das suas máquinas ou instrumentos). Aparentemente, Descartes também acreditava que, reciprocamente, toda a equação algébrica em duas variáveis determina uma curva cuja construção pode ser efectuada por uma das suas máquinas, mas não estava em condições de poder demonstrar tal coisa. Ao contrário de Fermat, Descartes descreve sempre uma curva geometricamente, e só depois, se apropriado, deriva a sua equação. Em nenhuma circunstância começa por uma equação para definir uma curva. Afinal de contas, Descartes propusera-se fazer uma reforma do ensino da geometria. Um critério puramente algébrico na definição de curva reduziria a geometria à álgebra, e nada estaria mais longe do seu espírito. Nos séculos seguintes diversos matemáticos tentaram generalizar os métodos e máquinas de Descartes para tentar encontrar outras maneiras geométricas para construir soluções de equações de diversos tipos. Tais métodos geométricos, todavia, mostraram-se inadequados para a compreensão plena de tais soluções — mais e mais se tomou evidente a necessidade de recorrer a métodos algébricos e a novas técnicas e noções do cálculo infinitesimal.

Descartes observa que um polinómio $f(x)$ é divisível por $(x-a)$ se e só se a é uma raiz de $f(x)$ e, partindo dos estudos de Albert Girard (1595-1632), apresenta uma prova intuitiva de que toda a equação polinomial de grau n tem (pode ter) n raizes [reais ou imaginárias (complexas) — em contraste com a prática anterior, Descartes acaba por admitir desinibidamente raizes negativas e imaginárias]. Este resultado é modernamente conhecido por Teorema Fundamental da Álgebra, e a primeira demonstração rigorosa foi feita por Karl Gauss (1777-1855) em 1799, que produziria três outras demonstrações, duas em 1816 e outra em 1849. Nesta terceira parte deste trabalho de Descartes também se faz uso explícito, pela primeira vez, da chamada *regra dos sinais de Descartes*, uma regra para determinar, por simples observação, o número máximo de raizes positivas de uma equação polinomial. Diz-se que dois termos consecutivos da equação com coeficientes reais $a_0x^n+...+a_n=0$ ($a_0>0$) apresentam uma *variação de sinal* se os seus coeficientes tiverem sinais contrários. A dita regra diz: o número de raizes positivas (contando cada raiz quantas vezes a sua multiplicidade) da equação $a_0x^n+...+a_n=0$ é igual ao número de variações de sinal ou esse número menos um inteiro positivo par. Por exemplo, a equação $x^3+x^2-x+2=0$ tem duas (possivelmente iguais) ou nenhuma raiz positiva, mas quantas ao certo a regra não diz. Como as raizes negativas de $f(x)=0$ são as raizes positivas de $f(-x)=0$, a regra também permite calcular o número máximo de raizes negativas.

Dos outros dois Apêndices, um trata de Óptica e o outro de fenómenos meteorológicos, incluindo o arco-íris. Das outras contribuições matemáticas de Descartes há a mencionar a "quase" descoberta da fórmula de Euler $V-A+F=2$ relacionando o número de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, a primeira discussão de uma curva cúbica nodal chamada *fólio de Descartes*, a consideração de parábolas de ordem superior ($y^n=px, n>2$) e a construção de tangentes à ciclóide.

Conclusão

Por todas as suas contribuições filosóficas e científicas, Descartes é a figura intelectual dominante do século XVII e este é, seguramente, o século de Descartes. Pode-se dizer que Descartes é um matemático acidental, e que a sua geometria analítica —"o método de dar equações algébricas a curvas", no dizer de Voltaire — é apenas um episódio numa carreira rica de inovações. Para Descartes, cidadão do mundo, nada havia de mais importante para garantir a veracidade dos conhecimentos do que o escrutínio crítico do pensamento: "Nunca devemos deixar-nos persuadir da verdade de uma coisa a não ser através da evidência da razão". O racionalismo cartesiano não é tudo nesta vida, mas a "dúvida sistemática" é um bem indispensável no mundo moderno em que persistem o obscurantismo, a fraude intelectual e política e os atropelos da ética. Curioso é que um homem tão aclamado pela França tenha vivido os seus anos mais produtivos fora do país natal, não tenha ensinado em nenhuma das suas escolas nem servido os seus exércitos.

A geometria analítica moderna é um instrumento poderoso na aprendizagem das geometrias, principalmente as de dimensão superior. Não creio, todavia, que tenha destronado a geometria euclidiana (e as não euclidianas), como tal, em versões axiomáticas modernas, onde é bem patente o desenvolvimento tanto da intuição geométrica como do raciocínio dedutivo tão caro a Descartes, propiciadores de formação básica e sentimento de beleza das matemáticas (Ah, faltava a emoção estética!).

Notas

1. Breve texto escrito a pedido dos editores, para comemorar os 400 anos do nascimento de Descartes. Não sendo especialista em História da Matemática, aproveitei a oportunidade para consultar alguns trabalhos referidos na Bibliografia e fazer uma síntese das leituras. Limito-me a considerações de natureza matemática, sobre a geometria analítica no século XVII e a contribuição de Descartes, deixando para outros as de ordem biográfica ou filosófica, pedindo desde já desculpas antecipadas ao leitor por eventuais erros de apreciação.

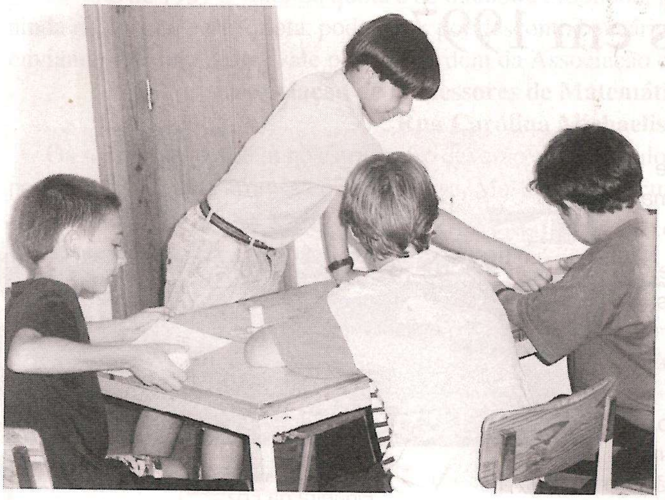
2. Por abuso, denotamos um segmento e o seu comprimento pelo mesmo símbolo.

Referências

Anglin, W.S., Lambek, J. (1995). *The Heritage of Thales*. New York: Springer-Verlag.

Boyer, C. (1949). "Analitic Geometry: The Discovery of Fermat and Descartes.", *Mathematics Teacher* 37 (1944), 99-105; "The Invention of Analitic Geometry", *Scientific American* 180 (Jan. 1949), 40-45.

(continua na página 47)



atitudes negativas a rigidez dos professores nas explicações, a rotina das aulas que é identificada com "sempre a fazer exercícios" e ainda a dificuldade que os alunos têm em colocar dúvidas, não só pelo medo de se exporem, mas também porque muitas vezes sentem

são discutidos. Os saberes informais dos alunos são valorizados e usados como ponto de partida para a aquisição/compreensão de procedimentos formais.

De início, todas as crianças gostam de matemática - naturalmente elas fazem matemática, descobrem padrões, fazem conjecturas baseadas nas suas observações. Mas, infelizmente, muitas delas à medida que a escola avança começam a passar do entusiasmo para a apreensão e o desinteresse. Para muitos alunos e para as pessoas em geral, as memórias das suas experiências com a matemática são desagradáveis e a matemática não é vista como alguma coisa que possa ser útil, mas como algo que é para esquecer. A propósito, não resisto a contar o seguinte episódio. Num consultório, a recepcionista, para preencher uma ficha de identificação, perguntou-me qual era a minha profissão. Após ter respondido que era professora, a jovem, com uma expressão expectante, retorqui de imediato: não é de Matemática, pois não? (Que imagem da Matemática terá esta jovem?).

Num estudo envolvendo alunos que tinham acabado o 9º ano de escolaridade, as imagens que emergem do seu discurso sobre o ensino-aprendizagem da Matemática estão com frequência relacionadas com as características pessoais do professor e as estratégias por ele usadas em situação de sala de aula. Assim, parece ter influência na formação de

que o professor se aborrece quando tem que explicar de novo.

Doig (1994) acentua que as qualidades pessoais do professor, que podem estar ligadas em certa medida às metodologias de ensino, são cruciais no desenvolvimento das atitudes dos alunos face à Matemática.

Como afirmei no início, já sabemos muito sobre como os alunos aprendem, é então necessário passar do saber ensinar para o saber estimular a aprendizagem, e isto nem sempre é fácil.

Escrevi este artigo, quando toda a comunicação social noticiava, mais uma vez, o "desastre" que tinham sido os resultados em Matemática dos exames do 12º ano e foi então que me ocorreu a ideia: Quando deixaremos de ouvir falar da Insustentável Leveza da Matemática?

Referências

Bruner, J. (1990). *Acts of Meaning.* Cambridge.: Harvard Univ. Press.

Doig, B. (1994). Prospective Teachers: Significant Events in Their Mathematical Lives. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.). *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Lisboa

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar.* Lisboa: APM e IIE.

Resnick, L. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology.* Hillsdale: L. Erlbaum.

Weil-Barais, A. & Vergnaud, G. (1990). Student's conceptions in physics and mathematics: biases and helps. In Caverni, Fabre & Gonzalez (Eds.), *Cognitive Biases.* North Holland: Elsevier Science Publishers B. V.

Isolina Oliveira
E. Prep. Damião de Góis, Lisboa

Descartes, geómetra acidental

(continuação da pág. 7)

Burton, D.M. (1991). *The History of Mathematics, An Introduction*, Second edition. Wm. C. Brown Publishers.

Descartes, R. (1954) *The Geometry of René Descartes*, trad. D.E. Smith e M.L. Latham. N.Y.: Dover.

Ebbibghaus, H. D. et al (1990). *Numbers.* N.Y.: Springer-Verlag.

Eves, E. (1990). *An Introduction to the History of Mathematics*, Sixth Edition. Sounders College.

Katz, V. J. (1993). *A History of Mathematics, An Introduction.* H.-Collins.

Mahoney, M. S. (1973). *The Mathematical Career of Pierre de Fermat* (1601-1665), Second edition. Princeton U.P.

Moise, E. E. (1990). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, 3th ed. Add.-Wesley.

Pastor, J. R., Santalo, L. A., Balanzat, M. (1959). *Geometria Analitica*, 4ª edição, Buenos Aires: Ed. Kapeluz.

Stillwell, J. (1989. *Mathematics and its History*,. N.Y.: Springer-Verlag.

Sruik, K. L. (1992. História Concisa das Matemáticas, segunda edição, revista e ampliada. Lisboa: Gradiva.

Vasconcelos, F. A. (1925). *História das Matemáticas na Antiguidade*,. Lisboa: Allaud & Bertrand.

van der Waerden, B. L. (1985). *A History of Algebra.* N.Y.: Springer-Verlag.

A. J. Franco Oliveira
Universidade de Évora