Dificuldades na aprendizagem dos números racionais

Cecília Monteiro e Cristolinda Costa

Um dos factores que atrasa a compreensão dos números racionais é a utilização prematura das regras no estudo das fracções e decimais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na aula de Matemática.

Durante a escolaridade básica, o conceito de número racional é considerado como um dos mais complexos e também dos mais importantes do currículo de Matemática. Na opinião de alguns autores[1] essa importância pode ser encarada segundo três perspectivas diferentes: *de um ponto de vista prático*, tem a ver com a capacidade das pessoas serem capazes de entender e resolver situações e problemas da vida real; *numa perspectiva psicológica*, os números racionais proporcionam o desenvolvimento das estruturas mentais necessárias ao crescimento intelectual; *na perspectiva matemática*, a compreensão dos números racionais proporciona uma base para futuros conhecimentos algébricos elementares. Os mesmos autores revelam resultados de outros trabalhos, referindo que a maior parte dos alunos com idades de 13 e 17 anos adiciona números representados por fracções com o mesmo denominador, enquanto somente 1/3 dos alunos com 13 anos e 2/3 dos alunos com 17 anos consegue calcular correctamente 1/2 + 1/3. No que se refere à representação decimal dos números racionais, encontram-se também vários exemplos na literatura referindo algumas dificuldades sentidas pelos alunos. Por exemplo, embora do ponto de vista conceptual a soma de 4,6 com 2,3 apresente o mesmo grau de dificuldade que a soma de 4 com 0,3, 90% dos alunos do 7º ano respondem correctamente à primeira soma enquanto que somente 37% acertam na segunda[2]. Uma possível explicação para este facto poderá ser que a memorização da regra impeça a interiorização do conceito. Num estudo conduzido por Swan, M. em 1983[3], detectou-se que na comparação dos decimais 0,62; 0,236 e 0,4, onde se pedia para dizer qual deles era o maior, 17% dos alunos referiram 0,62, 50% escolheram 0,236 e, surpreendentemente, 28% disseram ser o número 0,4 ("porque este número só tem décimas e os outros têm centésimas e milésimas", foram as justificações dadas). Neste mesmo estudo apenas 51% dos alunos de 15 anos responderam correctamente à questão "completa a afirmação seguinte: 73,45 = 70 + 3 + 0,4 +❑".

As dificuldades dos alunos em trabalhar com números racionais têm sido objecto de várias investigações[4], tendo sido identificados alguns factores que poderão justificar essas dificuldades, como por exemplo:

- A multiplicidade de significados dos números racionais.
- A conceptualização da unidade em diversos problemas ou situações envolvendo números racionais.
- Utilização precoce de regras e algoritmos no estudo dos números racionais e fracções.

A multiplicidade de significados dos números racionais

Esta multiplicidade está relacionada com a diversidade de contextos onde surgem as abordagens didácticas destes números, assim como das situações do dia a dia que traduzem. Por exemplo, 3/4 pode ser interpretado de várias maneiras; 3/4 de um bolo ou 3/4 como a razão entre o número de bolas brancas e o número de bolas pretas, ou ainda 3 maçãs a dividir por 4 pessoas têm significados diferentes. Tal facto não acontece com os números inteiros que são utilizados principalmente, quer para contar objectos discretos, quer para contar o número de repetições de uma unidade de medida em medições de uma grandeza, como por exemplo um comprimento.

A conceptualização da unidade em diversos problemas ou situações envolvendo números racionais.

No estudo dos números inteiros, na passagem das situações aditivas para as multiplicativas, aparecem já algumas situações que requerem do aluno que passe a conceber um conjunto de várias unidades simples como uma nova unidade composta (por exemplo, 12 unidades simples deverão ser interpretadas como uma nova unidade de "12", como no caso da situação de pagarmos os ovos à dúzia), e consequentemente a alargar o seu conceito de unidade. Neste alargamento do conceito de unidade, alterações mais profundas ocorrem quando os alunos são confrontados com os números racionais. Hiebert e Behr (1988) comentam que as primeiras experiências dos alunos com estes números são situações de parte-todo em que o novo símbolo (fracção ou decimal) representa parte de uma unidade que foi dividida em partes iguais. As unidades, até aqui consideradas como um todo, passam a ser divididas. Por outro lado, a unidade que serve de contexto e que aporta significado à nova representação nem sempre é explicitada nas situações propostas aos alunos, como acontece ao trabalhar num campo puramente simbólico, como determinar a soma de 1/3 com 1/4 onde não aparece explícita a unidade a que se referam estes símbolos. Para além disso, cada uma das partes em que a unidade é dividida pode agora funcionar como um novo tipo de unidade que não mantém as mesmas características da unidade inicial, como por exemplo em situações em que é necessário compreender 0,01 como sendo 0,1 de 0,1. As actividades de quantificação são agora, em lugar da contagem, a medição e a divisão em partes iguais. Dificuldades adicionais surgem ainda quando se considera a divisão de uma unidade composta. Por exemplo, 1/3 de uma unidade contínua ou 1/3 de um conjunto discreto de 15 elementos são situações diferentes, e o facto de 5 (unidades simples) corresponder à segunda situação pode constituir um motivo de perturbação para os alunos.

Alterações mais complexas na natureza da unidade vão surgindo à medida em que os números racionais passam a ser interpretados nas suas várias vertentes. Por exemplo, ao interpretar os números racionais como uma razão, como em "2/3" para representar 2 rapazes para cada 3 raparigas, um novo tipo de unidade é criado (a razão 2/3) através da comparação de duas unidades originais. Esta situação representa assim uma extensão do próprio conceito de unidade. Ao confrontarem-se com uma diversidade de situações problemáticas, os alunos terão ainda a tarefa adicional de antecipar a estrutura da unidade que melhor convém à resolução dessas situações. Os mesmos autores sugerem o seguinte exemplo:

"Quantas pizzas serão necessárias para servir a 20 pessoas se 3 pizzas são a quantidade indicada para 7 pessoas?".

Para responder a esta questão, não ajudará conceber a unidade como 1 pessoa, ou 1 pizza. Contudo, raciocinar em termos de 3 pizzas para 7 pessoas como uma unidade, ou criar através dessa comparação a unidade de 3/7 de pizza (por pessoa), já poderá conduzir à resolução do problema.

Mochon (1993) analisa a situação da dependência da unidade nas abordagens não formais do estudo das fracções e dá o exemplo da figura seguinte, onde se pergunta: que fracção das pintas está representada na figura 1?

Acontecem diferentes respostas: 5 (a unidade é cada uma das pintas); 5/8 (a unidade considerada é a figura das 8 pintas); 5/3 e 3/5 (a situação foi interpretada como uma razão); 2,5 (cada coluna foi considerada como uma unidade).

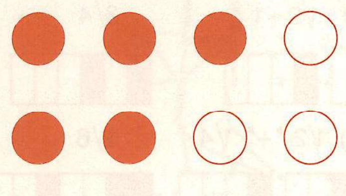

Fig. 1

Reconhecer a estrutura da unidade em diversas situações problemáticas torna-se necessário à resolução correcta dessas situações. Mochon dá ainda quatro exemplos, que se apresentam a seguir, onde a situação é de "juntar" quantidades representadas por fracções e que ilustram essa necessidade:

1. Andei 1/2 Km hoje e ontem tinha andado 1/4 Km. Quanto andei ao todo nos dois dias?
2. Se um jogador de basquetebol encesta uma em duas tentativas num jogo, e se noutro jogo encesta uma em quatro tentativas, qual a fracção que representa o desempenho do jogador nos dois jogos?l
3. 1/2 do cereal "Sweety" é açúcar, 1/4 do cereal "Healthy" é açúcar. Se misturar porções iguais de ambos os cereais, que fracção desta mistura é de açúcar?
4. Numa sala de aula 1/2 das crianças são rapazes e noutra sala 1/4 dos alunos são rapazes. Se pusermos os dois grupos juntos, que fracção de rapazes obtemos?

Adicionar matematicamente as fracções que representam estas situações conduz a resultados errados, excepto no primeiro caso, como facilmente se poderá ver, visto estes problemas serem diferentes do ponto de vista matemático. Graficamente poder-se-à compreender melhor essas diferenças, e as possíveis razões dos erros dos alunos (ver fig. 2)

A mudança de unidade no caso do problema dos cereais implica uma divisão por dois, depois de se adicionar 1/2 com 1/4, visto que tinha duas quantidades iguais de cereais. No caso do problema dos jogos, a soma dos numeradores e denominadores

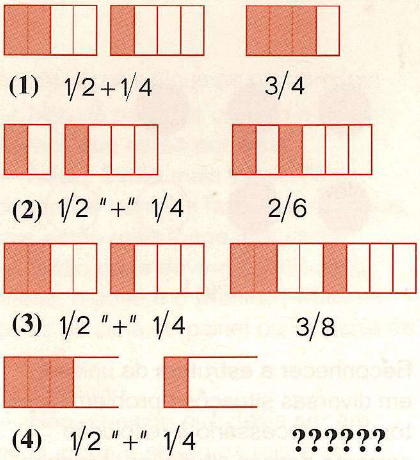

Fig. 2

revela a noção de "combinar" associada à adição, como aliás se passa com a adição de números inteiros. Finalmente, no último problema falta a referência à unidade e portanto há várias soluções consoante o número de alunos das turmas.

A um nível elementar é pois importante referir a unidade em causa, pois 3/4 ou 1/5 não têm significado só por si para alunos da escolaridade básica, mas somente quando associados a um contexto. O conhecido problema, "A Maria gastou 1/4 do seu dinheiro e o João gastou 1/2 do seu. É possível a Maria ter gasto mais dinheiro que o João?", exemplifica a necessidade didáctica de chamar a atenção para a unidade.

Utilização precoce de regras e algoritmos no estudo dos números racionais e fracções

A utilização prematura das regras no estudo das fracções e decimais tem sido detectada como outro factor que atrasa a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática. De acordo com vários autores[5], os alunos tentam de início ligar os símbolos às situações matemáticas que o professor lhes apresenta, revelando uma compreensão semântica dos problemas. No entanto, quando estes progridem na escola, o uso frequente de símbolos e regras desligados de contextos significativos, dá uma vida própria a estes e separa dramaticamente os símbolos e regras da compreensão conceptual subjacente. Os alunos trabalham com símbolos aplicando regras memorizadas, de tal modo que a mecanização de procedimentos e a compreensão dos conceitos podem considerar-se como pertencentes a dois mundos completamente separados.

Procuraremos em seguida detectar algumas das dificuldades com que os alunos se defrontam na aprendizagem deste assunto.

Alguns exemplos de erros mais frequentes dos alunos

A. Conceito de número racional

Para assinalar 1/3 da figura 3, os alunos pintam a primeira linha (um grupo de três) na figura 3

Quando se pede para pintar 1/4 da figura 4, pintam 4/12 (4 partes)

Identificam na recta numérica o número 3/4 com os pontos A ou B (ver fig. 5)

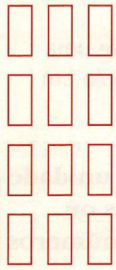
Fig. 3

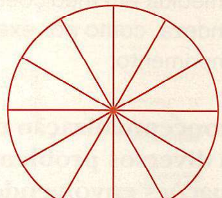
Fig. 4

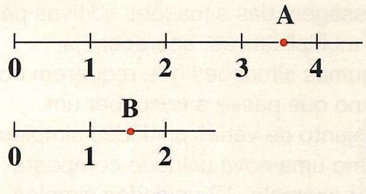

Fig. 5

B. Comparação de números racionais representados por fracções

Na questão "Qual das fracções representa um número maior, 3/5 ou 2/6?", a resposta 2/6 é bastante frequente. A razão normalmente apresentada é o facto de 6 ser maior do que 5.

Do mesmo modo, quando se pede para comparar 1/3 com 1/4, escrevem "1/3 < 1/4" porque 3 é menor que 4.

C. Operações com números representados por fracções

"1/2 + 2/3 = 3/5"

Não distinção entre operações com inteiros de operações com fracções

6÷1/2 = 3

A justificação é porque a divisão "diminui", portanto 12 não seria uma resposta razoável.

D. Erros com decimais

Num estudo conduzido entre alunos portugueses do 4º e 5º anos de escolaridade[6], verificou-se que os números decimais não estão suficientemente desenvolvidos pelos alunos. As dificuldades manifestadas abrangem o próprio conceito de número decimal, relações de grandeza e proximidade e o significado das operações. Alguns exemplos dessas dificuldades são os seguintes:

1. Na figura 6 está indicada uma proposta e os erros cometidos pelos alunos.

2. Numa questão em que os alunos deveriam seleccionar, entre os números de uma lista, o número mais próximo de um número dado, menos de metade dos alunos identificaram 3 como o número mais próximo de 2,9, ou 2 como o mais próximo de 0,18 (sendo as respostas mais frequentes 2 e 1, respectivamente).

3. Quando se pedia para adicionar 10 unidades a 0,15, 43% dos alunos do 5º ano erraram. As respostas mais frequentes foram 0,25 (19% dos alunos) e 0,16. De modo idêntico 40% dos alunos do 5º ano não conseguiram adicionar correctamente uma décima a 2,9 e deram respostas como 2,10 (a mais frequente), 2,91, ou 12,9.

4. Ao comparar 8 x 0,4 com 8 ÷ 0,4 a maioria dos alunos refere o produto como conducente a um resultado maior, provavelmente influenciados pelo modelo interiorizado das opera-

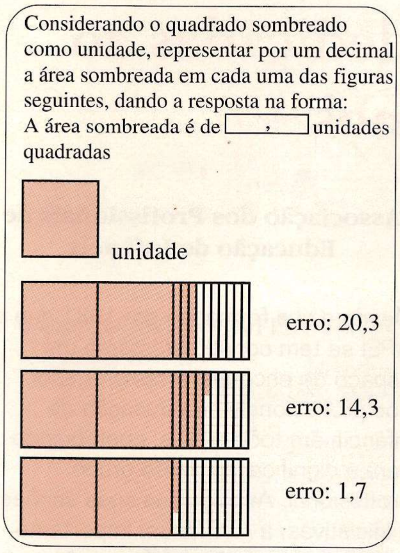

Fig. 6

ções com os números inteiros em que "a multiplicação aumenta e a divisão diminui".

Alguns dos erros que referimos nesta secção podem ser reportados a certas concepções desenvolvidas pelos alunos a respeito do trabalho com os números inteiros. A dificuldade de entender uma fracção como dois números inteiros que se encontram inequivocamente relacionados pode conduzi-los a tratar esses números separadamente, trabalhando assim num campo em que se sentem mais seguros. O reconhecimento dos números racionais como uma extensão do conceito de número sujeita a novas restrições e onde certos modelos previamente utilizados já não são aplicáveis, é um processo demorado e complexo.

A análise dos erros dos alunos poder-nos-à ajudar na selecção de situações de aprendizagem, cuja discussão poderá apontar para a identificação de conflitos ocasionados por restrições impostas por modelos provenientes do trabalho com números inteiros, nomeadamente a natureza da unidade, a noção de grandeza de um número, ou o efeito das operações.

Notas

1. Ver por exemplo, Behr, M, Lesh, R, Post, T. & Silver, E. (1983)
2. Ver Wearne, D. & Hiebert, J. (1988)
3. Trabalho apresentado no Shell Center for Mathematical Education, Institute of Science, Israel.
4. Ver, por exemplo, Behr, M., Lesh, R. & Post, T., & Silver, E. (1983, 1992); Wearne, D. & Hiebert, J. (1988).
5. Ver por exemplo Wearne, D. & Hiebert, J. (1988).
6. Ver Costa, C. (1993)

Bibliografia

Behr, M., Lesh, R,, Post, T. & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Costa, C. (1993). Aplicação a estudantes portugueses do teste "Place Value and Decimals" desenvolvido no âmbito do Projecto CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science), Londres. Relatório preliminar.

Hiebert,J. & Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the Major Themes. In J. Hiebert and M. Behr, (Eds.) *Number Concepts and Operations in The Middle Grades*. Lawrence Erlbaum Associates, Reston, VA: USA.

Mochon, S. (1993). When Can You Meaningfully Add Rates, Ratios and Fractions?. For the Learning of Mathematics, 13, 3, 16-21. FLM Publishing Association. Vancouver, British Columbia, Canada.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). Constructing and Using Meaning for Mathematical Symbols: The Case of Decimal Fractions. In J. Hiebert and M. Behr, (Eds.) *Number Concepts and Operations in The Middle Grades*. Lawrence Erlbaum Associates,Reston,VA: USA.

Cecília Monteiro
Esc. Superior de Educação de Lisboa
Cristolinda Costa
Esc. Superior de Educação de Faro

Maria Amália Borges de Medeiros

Maria Amália Borges nasceu em Lisboa em 1919.

Proveniente de uma família burguesa fez uma licenciatura na Faculdade de Letras de Lisboa em 1943, obtendo mais tarde, em 1946, o diploma de ensino especial de crianças deficientes do Instituto Aurélio da Costa Ferreira.

Conhecida por ter sido rcsponsável pela introdução das técnicas de Freinet no Centro Helen Keller, Maria Amália Borges foi uma figura proeminente do Movimento da Escola Nova.

"A aprendizagem é um processo activo e não uma memorização no sentido estrito da palavra".

"Não basta compreender que 2 e 2 são 4, para que esse conhecimento nos possa ser útil, é necessário ter vivido situações reais em que o estabelecimento dessa relação nos tenho dado a chave do problema"