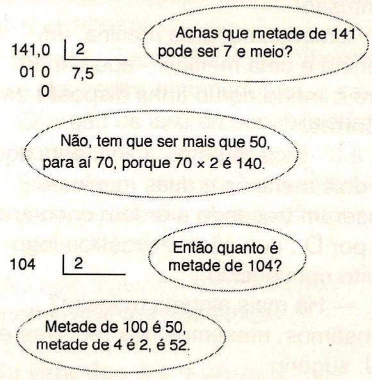
Às voltas com a divisão de números inteiros

Cristina Loureiro

"— Eles não sabem dividir!" — Foi este comentário que a professora de uma turma do 5º ano fez quando muitos dos seus alunos não estavam a ser capazes de acabar um problema em que, na parte final, tinham dividir por 2 uma soma de dois números encontrados por contagem.

E os alunos ficavam parados olhando para os seus cálculos e não continuavam... Contudo, quando nos aproximámos deles e fomos fazendo perguntas a partir dos erros ou impasses em que se encontravam, apercebemo-nos de que afinal de contas eles sabiam dividir, e sabiam bastante acerca da divisão, estavam era errando no algoritmo ou já nem sabiam como pegar-lhe.

"— Eles não sabem dividir!"... E os alunos ficavam parados olhando para os seus cálculos e não continuavam... Contudo, quando nos aproximámos deles e fomos fazendo perguntas a partir dos erros ou impasses em que se encontravam, apercebemo-nos de que afinal de contas eles sabiam dividir, e sabiam bastante acerca da divisão, estavam era errando no algoritmo ou já nem sabiam como pegar-lhe.



Quando falamos de divisão há vários aspectos que estão em jogo e que interessa indentificar para sabermos como ensiná-los e para distinguirmos aprendizagens e dificuldades dos alunos. É certo que estes alunos do 5º ano revelaram algumas dificuldades, mas também mostraram alguns conhecimentos, ao nível do cálculo mental e da estimação, precisamente aqueles que mais facilmente nos esquecemos de trabalhar com eles e que muitas vezes desprezamos.

Em que situações recorro à divisão? Que tipo de factos sobre a divisão utilizo na resolução de problemas? Que conhecimentos de outras operações são úteis à divisão? Que conhecimentos da divisão são úteis às outras operações? Que outro tipo de factos estão ligados à divisão?

Estas e outras perguntas ajudam-nos a ver que na divisão há muitas ideias em jogo e que interessa desmontar. Uma forma de organizar ideias sobre a divisão de números inteiros é a partir dos seguintes aspectos: Sentido e linguagem da divisão; Estimação; Cálculo Mental; Algoritmo. Estes, apesar de interligados, podem ser pensados separadamente.

Sentido e linguagem da divisão

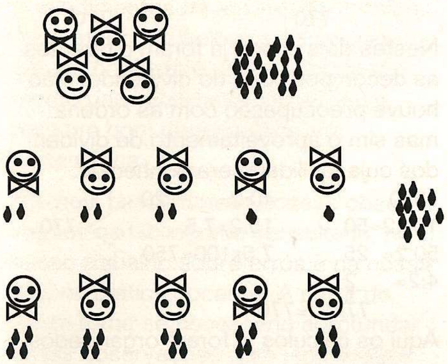
De um ponto de vista formal podemos considerar a divisão como a operação inversa da multiplicação, mas esta ideia nada avança sobre o seu significado ou sentido. Por outro lado as ideias sobre didáctica apontam que, antes de uma aprendizagem formal, a criança tenha muitas experiências com problemas sobre divisão que aparecem no dia-a-dia.

As crianças começam a usar a ideia de divisão muito cedo e muito antes até do conceito de multiplicação se esboçar. Uma criança utiliza fundamentalmente a divisão com dois sentidos, o primeiro surge quando ela tem que partilhar um conjunto de objectos com outras crianças, e o segundo quando a criança procura saber quantos objectos de um certo valor conseguirá obter a partir de um determinado valor inicial.

Um saco com rebuçados para um grupo de crianças. Com quantos vai ficar cada uma?

Este primeiro tipo de divisão, partilha

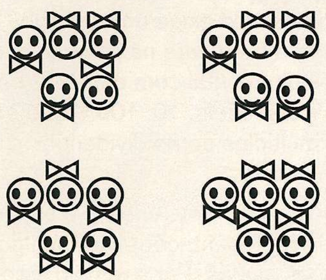
(*sharing* ou *partition*), é aquele que matematicamente é menos simples, mas é o que a criança começa a utilizar mais cedo. Ele não exige qualquer conhecimento de contagem pois os rebuçados podem ser distribuídos mesmo que a criança não saiba quantos rebuçados tem nem quantas crianças há no grupo. A única coisa que ela tem que fazer é ir dando um rebuçado a cada um até que não haja mais rebuçados, ou até que os rebuçados já não cheguem para mais uma rodada.



É por isso que se chama divisão partitiva visto que o total é partilhado. Para a realizar a criança precisa apenas de objectos e de caixas vazias. Naturalmente que as contagens vão surgindo, tanto para responder à pergunta "Quantos rebuçados para cada um?", como para contar quantos objectos iniciais e quantos conjuntos.

Um grupo de crianças vai fazer um passeio de automóvel. Quantos automóveis são necessários?

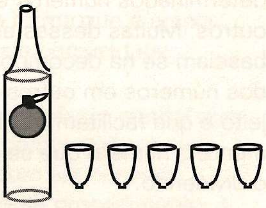
Neste caso vamos fazendo grupinhos de crianças, um grupinho um automóvel, para saber quantos automóveis são necessários.



Trata-se da divisão por agrupamento (*grouping* ou *quotition*) que é matematicamente bastante mais simples, mas que para a criança parece não ter nada a ver com divisão porque ela não partilha nada, faz agrupamentos com igual número de elementos.

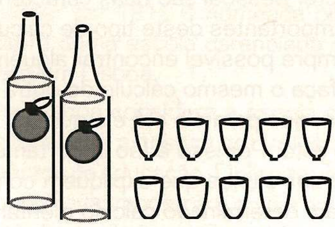
Esta sentido da divisão, também é considerado como divisão como medida pois pretende-se saber quantas vezes uma determinada medida, neste caso cinco crianças, cabe em 20. Este sentido é aquele que está mais próximo da ideia "em 20 quantas vezes cabe o 5" que é a que geralmente prevalece quando se trabalha a divisão. Esta ideia de "quantos cabe" pode levar-nos a avançar nos conhecimentos sobre a divisão.

Para quantos copos de 20 cl dá uma garrafa de 1 litro?



Esta simples questão pode ser resolvida com o recurso a uma garrafa e copos (há copos no mercado com a inscrição de 20 cl), mesmo antes de se iniciar o trabalho com redução. É uma resolução em que a ideia de medida é muito sugestiva e que dá pistas para continuar a trabalhá-la. As potencialidades de ligação são bastante interessantes e apontam-nos uma articulação de factos e raciocínios tão importante quando se defende que o conhecimento é activamente construído pelo sujeito.

Uma garrafa de 2 litros para quantos copos de 20 cl dá? E uma de 3 litros? E com 10 litros quantos copos podemos encher?



Depois de obtida a resposta à primeira questão, podemos obter todas as outras respostas á partir dela e de duas maneiras diferentes:

1 litro dá para 5 copos

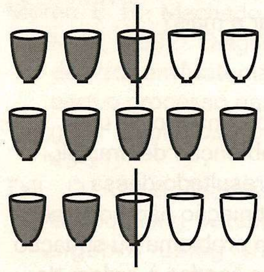
2 litros dá para 10;   5 + 5   ou   2 x 5

3 litros dá para 15:   10 + 5 ou   3 x 5

...

10 litros dá para 50

Mas há as garrafas de água que têm meio litro. Para quantos copos dá uma destas garrafas? E uma garrafa de litro e meio?



Se compararmos os dois sentidos em que a divisão aparece, não deixa de ser interessante notar que o primeiro é bastante mais acessível à criança e é o que aparece mais frequentemente em situações do dia-a-dia. Por outro lado o segundo sentido é o que mais referimos quando trabalhamos as ideias "quantas vezes cabe" ou "quantos há em", indispensável na aprendizagem do algoritmo.

O primeiro é mais trabalhado com materiais porque é mais acessível. Mas o segundo é o que é utilizado no algoritmo, e por isso também deve ser trabalhado com materiais para preparar o caminho da abstracção.

Em qualquer destes sentidos o quociente pode ser obtido por contagem, no primeiro caso, quantos objectos por agrupamento, no segundo, quantos subconjuntos ou agrupamentos com igual número de objectos.

A questão do resto e o seu significado na divisão também podem ser trabalhados a partir de situações deste tipo e muito antes de qualquer referência ao algoritmo. Com os rebuçados, os automóveis e os copos o resto vai surgir com significados bastantes diferentes e passíveis de alguma discussão. Se decidirmos que todos os meninos ficam com o mesmo número de rebuçados, podem sobrar 3 rebuçados, mas não podem sobrar 3 meninos no passeio, é preciso arranjar outro automóvel que não vai ficar cheio. No caso dos copos posso discutir se só quero ou não copos cheios, então com meio litro encho 2 copos e sobra um bocadinho na garrafa ou tenho 2 copos e meio. Este último exemplo deixa-nos as portas abertas para a introdução de decimais a partir da divisão.

A linguagem e os problemas do res. sugerem que se proponham questões do tipo: Vai chegar para dar 20 a cada um? Sobra alguma coisa? E quantos é preciso ir buscar a mais?

A estimação

A estimação, no contexto de uma operação, é a obtenção de um valor aproximado do resultado dessa operação. A estimação não pode ser desligada de um problema ou situação pois as decisões ligadas à ordem de grandeza do resultado a estimar e ao tipo de aproximação, por excesso ou por defeito, são ditadas pela própria situação. Por exemplo, numa situação de despesa interessa trabalhar com valores aproximados por excesso, para não ter surpresas. Mas já numa situação de partilha interessa recorrer a valores aproximados por defeito, pois é preferível haver sobras do que faltas.

Tenho 500 rebuçados para 23 miúdos. Posso dar 20 a cada um? Quantos posso dar a cada um?

Uma leitura mecanizada da situação pode levar à utilização imediata da divisão, mas neste caso o raciocínio mais eficaz é: 20 vezes 23 é 460, portanto cada um pode receber 20. Este raciocínio, aliás, ajuda-nos a notar que é no contexto da estimação que a relação entre a divisão e a multiplicação é mais evidente e útil.

A primeira pergunta dá-nos já algumas indicações para continuar recorrendo à multiplicação. Uma hipótese de resolução é:

- 23 x 20 = 460 sobram 40, ainda dá para mais uma rodada
- 23 x 21 = 483 sobram 17, já não dá para mais uma rodada

Cada miúdo pode receber 21 e sobram 17 rebuçados. Ao fazermos este raciocínio estamos a utilizar a ideia de divisão como medida. Sabemos que temos de fazer 23 agrupamentos, não sabemos é quantas unidades em cada agrupamento.

E continuamos a resolver problemas de divisão sem utilizar o algoritmo. E mais, estamos a preparar o caminho para que o algoritmo seja entendido, e cada vez sabemos mais sobre a divisão.

Cálculo mental

Entende-se por cálculo mental a utilização mental de estratégias de cálculo sem o recurso de papel e lápis. Estas não se consideram algoritmos pois não são gerais, isto é, não são adequadas para todos os números e têm um carácter pessoal. Uma estratégia pode ser útil com determinados números e não ser com outros. Muitas dessas estratégias baseiam-se na decomposição de um dos números em outros que dão mais jeito e que facilitam o cálculo. Geralmente o número que se decompõe é o dividendo.

104 : 2
100 : 2 = 50
4 : 2 = 2
50 + 2 = **52**

96 : 2
96 = 100 - 4
100 : 2 = 50
4 : 2 = 2
50 - 2 = **48**

300 : 2
100 : 2 = 50
300 = 3 x 100
3 x 50 = **150**

É impossível fazer uma lista exaustiva de estratégias de cálculo mental para a divisão, ou para outra operação qualquer, pois a diversidade e o carácter pessoal são duas características importantes deste tipo de cálculo. É sempre possível encontrar alguém que faça o mesmo cálculo de outra forma, que para ela até é a que dá mais jeito. Por isso é tão importante pedir aos alunos que expliquem como fizeram determinado cálculo mentalmente.

Experimentei perguntar a várias pessoas como calculavam mentalmente 1540:2. As respostas são deveras interessantes.

40:2= 20	1000:2=500	1000:2=500
500:2= 250	500:2=250	500:2=250
270	750	40:2= 20
1000:2=500	40:2= 20	770
770	770	

Embora muito semelhantes estas estratégias de cálculo revelam algumas diferenças, quer na forma de encarar o dividendo quer na forma de ir associando resultados parciais. Mas em todas elas a decomposição do dividendo teve em conta as ordens dos algarismos.

1500:2=750	1400:2=700
40:2= 20	140:2= 70
770	770

Nestes dois casos já foram diferentes as decomposições do dividendo. Não houve preocupação com as ordens mas sim o aproveitamento de dividendos cuja facilidade era conhecida.

1540	40:2= 20
100:2=50	15:2=7,5
50:2= 25	7,5x100=750
4:2= 2	770
77x10=770	

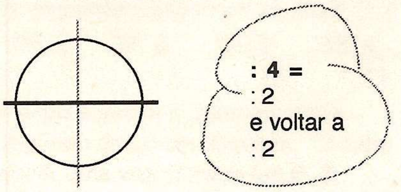
Aqui os cálculos já foram organizados com base em conhecimentos de outra natureza. Foi feito o recurso a números muito mais pequenos, por isso mais acessíveis de trabalhar, e a propriedades decorrentes do sistema de numeração de base 10. Multiplicar ou dividir por 10, 100,..., é apenas um trabalho de posição com os mesmos algarismos.

15:2= 7 e sobra 1
140:2= 70
770

Este esquema indicia uma grande ligação ao algoritmo. Ele é quase o algoritmo realizado sem o recurso de papel e lápis.

A obtenção de quocientes mentalmente pressupõe uma boa organização mental e alguma capacidade de representação. A segurança neste tipo de cálculo exige um trabalho aturado e frequente na estimação e no cálculo mental com os números ditos mais fáceis, 10, 100, 1000 e seus múltiplos como dividendos e 2 como divisor.

O trabalho com materiais e a associação de representações também pode dar boas ajudas. Por exemplo, para dividir por 4 mentalmente uma estratégia possível é dividir por 2 e a seguir volta a dividir o quociente obtido por 2. Mas isso é partir ao meio e voltar a partir a meio.



Algoritmo

A primeira ideia significativa quando se fala de algoritmo é que não há só um algoritmo. Aliás basta consultar a literatura de origem anglo-saxónica para concluir que nestes países se organiza o cálculo numa divisão de maneira completamente diferente da nossa. E um algoritmo de cálculo é isso mesmo, um conjunto organizado de procedimentos e registos que permite obter a resposta para qualquer cálculo da mesma natureza, o nosso algoritmo tradicional da divisão permite obter o quociente e o resto de qualquer divisão de dois números, sejam eles inteiros ou decimais. E quando olhamos para um algoritmo já aplicado corremos o risco de não perceber nada do que se passou. Senão vejamos duas boas maneiras de obter o quociente e o resto de uma divisão, os algoritmos A e B.

A

7	346	
	210	30
	136	
	70	10
	66	
	63	9
	3	49

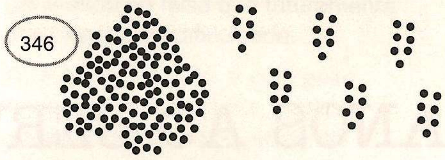
B

	49
	9
	40
7	346
	280
	66
	63
	3

É por isso que o algoritmo tradicional, por ser demasiado sintético e exigir cálculos intermédios não registados é tão difícil de aplicar. As orientações metodológicas de hoje sugerem que os professores trabalhem com os alunos algoritmos mais ligados às representações materiais e ao significado da operação. Se repararmos com algum cuidado nos dois algoritmos apresentados, em que se obteve o resultado da divisão de 346 por 7, notamos que eles têm uma grande ligação ao significado material.

A diferença mais significativa entre eles é o local de registo dos quocientes intermédios que vão sendo obtidos. A analogia que têm com o nosso algoritmo tradicional é que todos se fundamentam na divisão por agrupamento. Em qualquer eles, dividir 346 por 7 é saber quantos grupinhos de 7 posso fazer com 346. A forma como faço a contagem do número de grupinhos é que é completamente diferente. Esta pode ser organizada em emparcelamentos intermédios (30 + 10 + 9, no A), ou ser mais exigente (40 + 9, no B).

Para dividir 346 por 7, posso ir fazendo os agrupamentos de 7. Ao fazê-lo estou a subtrair sucessivamente 7 ao dividendo. Esta é uma ideia perfeitamente materializável e muito acessível.



346 - 7 - 7 - 7 - 7- 7- 7

A forma como depois obtenho o número total de agrupamentos é que pode ser mais ou menos elementar. Posso simplesmente contá-los um a um, mas posso também fazer agrupamentos de 10. Neste caso estarei a ver quantas vezes 70 cabe em 346, isto é, 346 -70 -70... ou seja

346 - 280 que está na base do registo do algoritmo B. Quando o 70 já não cabe, então passo ao 7, e quando este já não cabe a divisão acabou. Como posso tirar 4 setentas e 9 setes, o quociente é 49.

Nada disto é visível no nosso algoritmo tradicional, aquele que quase todos aprendemos na escola primária.

346	7
66	49
3	

Felizmente que hoje os professores já se preocupam que neste algoritmo sejam feitos outros registos, e que por isso o algoritmo passe a ter um aspecto mais expressivo dos procedimentos efectuados.

346	7
28	49
66	
63	
3	

Mas mesmo assim, e apesar das analogias, neste último caso os números intermédios não têm significados tão explícitos como no algoritmo B. O 28 significa de facto 28 dezenas, isto é, 280, mas é muito menos expressivo.

Destas observações ressalta que os algoritmos podem ter uma grande ligação à manipulação de materiais e que a construção e utilização de algoritmos só faz sentido se esta ligação for explorada. De outro modo o algoritmo não será mais do que uma mecanização de procedimentos, que se esquecem na primeira oportunidade, e sobre os quais não é possível ter qualquer controle. Além disso, ficou patente também que o recurso a problemas e situações concretas, as ligações com as outras operações, o domínio do sistema de numeração são ajudas fundamentais para o trabalho seguro com o algoritmo.

Estas considerações ajudam-nos a concluir que significados, estimação e cálculo mental podem ajudar a compreender o algoritmo da divisão. Por outro lado, a prática mecânica do algoritmo, de que muitos de nós guardamos má memória da nossa primária, não melhora em nada a utilização da divisão na resolução de problemas, a destreza no cálculo mental e na estimação. É por isso que a aposta de trabalho sobre a divisão tem que ser necessariamente nestas três vertentes, que além do mais são insubstituíveis. São as boas situações e experiências que podem levar a uma aprendizagem efectiva e útil.

No trabalho à volta da divisão estão várias aprendizagens em jogo que se articulam umas nas outras. Ao trabalhar esta operação em todas as suas componentes estamos também a trabalhar as outras operações e as ligações entre elas surgem naturalmente. Na aprendizagem da matemática nada está desligado de nada, e se pensarmos um pouco acabamos por estabelecer ligações e descobrir conexões que nem sonhávamos que existissem.

Bibliografia

Paige, D. & al. 1978. *Elementary Mathematical Methods*. John Wiley and Sons, New York.

Serrazina, Lurdes. 1995. *Ensinar/Aprender Matemática*. Actas do Profmat 95. APM, Lisboa.

Wiliams, E. , Shuard, H. 1990. *Primary MathematicsToday*. Longman, UK.

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa