Como alguns procedimentos de ensino estão contribuindo para o erro e o fracasso em Matemática

Maria Manuela David e Maria da Penha Machado

Os procedimentos de ensino podem estar levando os alunos ao fracasso em Matemática? Estamos reunindo neste artigo alguns resultados de pesquisa que nos levam a responder afirmativamente a esta questão. Alguns erros cometidos pelos alunos em determinadas situações estão relacionados com regras que foram treinadas anteriormente e não se aplicam a uma situação mais geral. A ênfase que vem sendo dada ao ensino de algoritmos e regras dissociados do conceito que está por trás dificulta o desenvolvimento do pensamento matemático.

Neste artigo focalizaremos alguns procedimentos de ensino que podem estar contribuindo para levar os alunos ao fracasso em Matemática.

Apresentaremos algumas evidências desse fato que foram percebidas na nossa pesquisa sobre análise de erros (Moren, David & Machado, 1992) e outras que foram encontradas nos trabalhos de Foster (1993). Este último analisa a origem de determinados erros como consequência de generalizações feitas pelos alunos a partir de casos particulares, não generalizáveis.

Explorando outra ótica, Tall & Vinner (1981) observam que os próprios procedimentos de ensino podem ser responsáveis por dificuldades futuras dos alunos com determinados conceitos, quando os exemplos inicialmente apresentados pelo professor levam o aluno a construir uma imagem mental desse conceito que é mais restrita, e não corresponde ao caso geral traduzido pela definição formal dos mesmos.

Ainda numa outra perspectiva, Gray & Tall (1993) analisam os efeitos de uma ênfase exagerada em determinados procedimentos e regras, e observam que esses procedimentos não favorecem a formação do pensamento matemático que levaria o aluno ao sucesso.

Reunindo todas essas pesquisas, pretendemos aprofundar a discussão de como alguns procedimentos de ensino podem ser responsáveis pelo erro e pelo fracasso em Matemática.

O excesso de treinamento em atividades rotineiras leva o aluno a criar regras falsas, que geram erros

Numa pesquisa sobre diagnóstico e análise de erros (Moren, David & Machado, 1992) encaramos o erro não apenas como avaliador do desempenho do aluno mas também como revelador de dificuldades de aprendizagem.

Através de um teste aplicado a alunos de 3ª, 4ª, 5ª e 6ª série do 1º grau em seis escolas públicas do Rio de Janeiro e cinco escolas públicas em Belo Horizonte avaliamos, entre outros aspectos, o desempenho dos alunos no mecanismo do algoritmo da subtração. Além da aplicação do teste realizamos algumas entrevistas que vieram subsidiar nossa análise.

Observando a impossibilidade de evitar os erros no processo de aprendizagem procuramos perceber a lógica que levou a errar e buscamos formas de reverter a situação de erro numa situação de aprendizagem.

Nossa análise nos levou a fazer algumas observações sobre procedimentos que, adotados em sala de aula, se não evitam o erro pelo menos podem contribuir para que o mesmo não se instale, ao mesmo tempo que colaboram para que o professor tenha uma postura positiva diante dele.

Por exemplo, observamos que numa situação de lápis-e-papel o aluno é levado a utilizar um procedimento padrão (às vezes errado) e que resolvendo "de cabeça" ele usa uma estratégia própria, correcta e muito próxima da estratégia padrão, sem que o professor (e o aluno) se apercebam disso:

O aluno W.- 4ª série apresenta a seguinte conta:

$$\begin{array}{r} 700 \\ \underline{-\ 5} \\ 605 \end{array}$$

e explica "passei um para cá, ficou 10, 10-5 ficou 5; nada, nada; aqui tive que passar, ficou 6" (tomou 1 emprestado ao 7, passando por cima do zero).

Posteriormente, a mesma operação (700 - 5=) lhe foi colocada numa "situação de troco": "Voltando a essa conta, imagine que você tem R$700,00 e vai comprar um chocolate que custa R$5,00. Você ainda ficou com quanto?" W. resolve o problema "de cabeça", correctamente, e reconhece que havia feito a conta errada.[1]

Instado a dizer como havia procedido, W. explica que fez 100-5=95, e dá a resposta 695. Esse raciocínio sugere que W. ao fazer a conta de cabeça faz a decomposição 700 = 600+100, que é basicamente o que ele também precisa fazer no algoritmo.

A aluna C.- 5ª série apresenta o seguinte resultado para a mesma conta

$$\begin{array}{r} 700 \\ -\ 5 \\ \hline 795 \end{array}$$

(não desconta o empréstimo feito)

Tal como o aluno W., quando C. é confrontada com uma "situação de troco", também resolve o problema "de cabeça", e correctamente.

Observamos que numa situação de problema com história num contexto prático, o aluno chega à resposta certa. Além disso a solução oral torna-se mais simples do que a escrita, porque o aluno não fica preso à técnica do algoritmo.[2]

Ainda neste contexto mais geral, também sugerimos trabalhar com o erro fazendo o aluno perceber que o uso de sua lógica leva a um resultado conflituoso. Com isso o aluno estará verbalizando o que fez, analisando sua lógica e fazendo uma avaliação de seu resultado. Estes são procedimentos que se aplicam a qualquer tipo de erro, e, se utilizados sistematicamente, contribuem para desenvolver o espírito crítico do aluno.

No que concerne aos erros específicos da falta de compreensão do algoritmo da subtracção, objecto de nosso trabalho, identificamos alguns tipos de erros decorrentes de técnicas operatórias treinadas anteriormente pelo aluno.

Por exemplo,

Constatamos que o aparecimento do zero introduz maior dificuldade nas contas. Uma situação de "empréstimo do zero" ou "empréstimo para o zero", aumenta a incidência dos erros que o aluno já comete normalmente em outras situações de empréstimo. Entretanto, o zero por si só não gera o aparecimento de erros específicos. O único erro que identificamos como directamente relacionado com a presença do zero nas contas foi o que classificamos como "não faz empréstimo do zero e sim da primeira casa à esquerda diferente de zero. (Moren et al, 1992, p. 47)

A demora em se introduzir contas com números envolvendo empréstimo ao zero leva o aluno a encarar este tipo de empréstimo como se fosse diferente, ou seja, demandando uma estratégia diferente. Ao lidar com o zero, o aluno substitui o procedimento padrão por um procedimento próprio que o leva ao erro. É claro que o zero introduz uma dificuldade a mais e o professor deve estar atento a isto, mas a técnica do empréstimo é exactamente a mesma e não deveria ser tão retardada.

Ao discutir a lógica dos erros *identificados por nós como mais frequentes* entre os alunos de 3ª à 6ª série do 1° grau verificamos que, em alguns casos, um confronto com a experiência escolar anterior dos alunos nos leva a concluir que o treino com os factos fundamentais, onde ele está sempre subtraindo o menor número do maior, lhe sugere fazer 800-168=768 (8-0=8; 6-0=6 e 8-1=7).

Por outro lado, a subtracção sem reserva reforça o trabalho coluna-a-coluna. Assim, o aluno que faz 854-168=796 (não desconta o empréstimo feito) pode estar sendo levado a não perceber os números envolvidos de uma forma global não fazendo, portanto, a decomposição 854=800+50+4. Esse aluno fará 14-8=6 e 15-6=9, sem relacionar as duas colunas.

Ainda analisando a situação 800-168=542 (não faz empréstimo do zero e sim à primeira ordem à esquerda que seja diferente de zero) observamos que na sua experiência anterior o aluno vem operando da direta para a esquerda o que o leva nesse caso a acumular todos os empréstimos no 8, dando a resposta 542. Entretanto, aqui, torna-se necessária uma decomposição inicial da esquerda para a direita: 800=700+90+10.

Concluímos desses casos que uma excessiva hierarquização em etapas de aprendizagem, ou níveis de dificuldade das operações pode surtir um efeito negativo, não desejado, levando o aluno a fazer generalizações e a criar regras com base em casos particulares, que não se aplicam ao caso geral. Concordamos que a ordem de apresentação das dificuldades deve ser mantida — factos fundamentais primeiro, e em seguida contas sem reagrupamento. Entretanto elas não devem ser trabalhadas de forma tão exaustiva, nem tão isoladas, retardando muito tempo as contas com reagrupamento, e as contas envolvendo zeros.

Foster (1993) ao mesmo tempo que amplia o domínio de aplicação de nossas conclusões a outras operações e/ou situações além da subtracção, limita sua discussão apenas àqueles tipos de erro que resultam de um treinamento feito de modo inadequado dos algoritmos.

Por exemplo, com relação ao algoritmo da divisão, ele observa que é comum os livros didácticos e os professores iniciarem o seu estudo com casos simples:

$$48\,\underline{|4} \quad 26\,\underline{|2} \quad 39\,\underline{|3} \quad 88\,\underline{|4}$$
$$\ 12 \quad \ 13 \quad \ 13 \quad \ 22$$

que podem levar ao seguinte tipo de raciocínio: "quatro cabem em 4 uma vez; 4 cabem em 8 duas vezes e registra-se 1 na ordem das dezenas e 2 na ordem das unidades.

Só depois de uma lista exaustiva de exercícios deste primeiro tipo é que se passa para aqueles em que é necessário fazer "reserva", como por exemplo 36 dividido por 2.

Perante estes casos, Foster relata o exemplo de uma criança que havia respondido correctamente a todos os exercícios do primeiro tipo, e agora dá as seguintes respostas erradas:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ \cline{2-2} & 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ \cline{2-2} & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 48 & 3 \\ \cline{2-2} & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 56 & 4 \\ \cline{2-2} & 11 \end{array}$$

e explica assim a primeira deste segundo grupo de divisões: "2 cabe em 3, uma vez; 2 cabe em 6, 3 vezes".

Foster comenta que esta sequência de exercícios pode contribuir para a criação de dificuldades, em vez de auxiliar no desenvolvimento da compreensão. Pois apesar de as respostas às questões do primeiro tipo estarem todas correctas, no fundo esses exemplos levaram a criança ao treinamento de um erro, já que a regra que ela criou a partir desses exemplos não se aplica a todos os casos, portanto não é uma regra válida para uma divisão qualquer.

Na mesma direcção das nossas conclusões, Foster acrescenta:

> Nas escolas primárias as crianças são encorajadas a praticar rotinas para se tornarem "fluentes" na aritmética elementar. A progressão vai das rotinas mais simples para as mais complexas. Esta parece ser a forma lógica de proceder. Porém, se observarmos o que realmente acontece na sala de aula vamos verificar que esta sequência pode encorajar as crianças a praticarem técnicas que funcionam num contexto limitado, mas que não podem ser generalizadas. Muito longe de lhes fornecer um processo de crescimento contínuo e cuidadosamente sequenciado, esta abordagem pode levar as crianças a aprenderem técnicas "defeituosas" que só podem ser diagnosticadas num estágio mais avançado.
>
> Entretanto, pode-se-lhes estar dando páginas e páginas de exercícios que os levam a praticar os seus erros, obtendo um sucesso de curta duração mas preparando-os, desavisadamente, para o fracasso futuro. (Foster, 1993, p.1)

Assim, o treinamento excessivo em apenas um certo tipo particular de situação, ao invés de estar contribuindo para uma melhor compreensão pode, ao contrário, estar reforçando a generalização indevida dessa situação particular, o que futuramente levará o aluno ao fracasso.

Essas observações levam-nos a reafirmar a enorme importância dos erros dos alunos como reveladores das dificuldades de aprendizagem, e nos levam também a alertar os professores para a necessidade de se tentar "prever" esses erros que podem ser originados por uma generalização inadequada, e, nesses casos antecipar o momento da passagem do particular para o geral, para que ele nem chegue a criar a generalização falsa que futuramente acarretará uma dificuldade.

A título de exemplo, e com esse mesmo intuito de alerta, Foster observa que uma sequência de adições e subtracções com números décimais, do seguinte tipo:

$$\begin{array}{r} 6{,}5 \\ +\,2{,}9 \\ \hline 9{,}4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}5 \\ +\,4{,}6 \\ \hline 10{,}1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}4 \\ -\,1{,}8 \\ \hline 3{,}6 \end{array}$$

pode levar à seguinte generalização: "desde que as vírgulas estejam alinhadas, podemos aplicar os algoritmos da adição e subtração, e obter assim as respostas correctas". Porém, quando aparece a multiplicação a criança pode fazer uma generalização inadequada, e chegará às respostas erradas:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ \times\,0{,}3 \\ \hline 10{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\,0{,}5 \\ \hline 12{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5{,}4 \\ \times\,0{,}2 \\ \hline 10{,}8 \end{array}$$

Portanto, os exercícios de fixação da aprendizagem, ainda que necessários numa sequência de ensino, podem levar o aluno a inferir uma regra própria, equivocada, que já deu certo em alguns casos, e que mais tarde entrará em conflito com a regra padrão da etapa seguinte.

Por outro lado, esses exercícios de fixação que, em geral se reduzem a um treinamento repetitivo do assunto estudado, não significam que necessariamente estejam ajudando o aluno na compreensão das ideias envolvidas.

O excesso de treinamento em atividades rotineiras não ajuda o aluno na formação de conceitos e não incentiva a versatilidade do pensamento necessária ao sucesso em Matemática

Olhando de uma perspectiva diferente, não mais na perspectiva da lógica que está por trás de determinados erros dos alunos, mas na perspectiva da formação de determinados conceitos matemáticos, Tall & Vinner (1981) analisam a influência da apresentação de alguns casos particulares desses conceitos na construção de uma imagem conceitual[3], que nem sempre corresponde à definição formal do conceito[4]. Eles discutem a formação dos conceitos de função, de limite, e de continuidade fazendo observações do seguinte tipo:

> Por exemplo a definição do conceito de função matemática pode ser tomada como "uma relação entre dois conjuntos A e B em que cada elemento de A está relacionado com exactamente um elemento de B". Mas os indivíduos que estudaram funções podem, ou não, lembrar a definição do conceito, e a imagem conceitual pode incluir muitos outros aspectos, tais como que uma função é dada por uma regra ou fórmula, ou talvez que várias fórmulas diferentes podem ser utilizadas em partes diferentes do domínio A. Podem existir outras noções, por exemplo pode-se pensar numa função como uma acção que associa *a* de A a f(*a*) de B, ou como um gráfico, ou como uma tabela de valores. Todos ou nenhum destes aspectos podem estar na imagem conceitual de um determinado indivíduo. Se o professor dá a definição formal e logo passa a trabalhar de uma forma rápida com a noção geral e depois trabalha um longo período de tempo com exemplos que são dados através de fórmulas, neste caso, a imagem conceitual pode desenvolver-se como uma noção mais restrita, envolvendo unicamente fórmulas, enquanto que a definição do conceito é totalmente passiva na estrutura cognitiva.

> De início, o aluno que está nesta situação dá conta de operar satisfatoriamente com esta noção restrita, que é apropriada ao seu contexto restrito. Ele pode até ter sido ensinado a responder com a definição formal correcta apesar de ter uma imagem conceitual inadequada. Mais tarde, quando ele encontra funções definidas num contexto mais amplo ele pode ser incapaz de lidar com elas.
> Contudo, foi o próprio programa de ensino o responsável por esta situação indesejável. (Tall & Vinner, 1981, p. 153).

Desse trabalho podemos inferir como implicação para o ensino que exemplos do mesmo tipo apresentados repetidamente não ajudam na formação do conceito uma vez que geram uma imagem conceitual restritiva, construída a partir de exemplos particulares. Dependendo da insistência nesses exemplos essa imagem conceitual, que não corresponde necessariamente à definição formal, pode tornar-se a mais forte, isto é, o aluno recorre de preferência a ela e não à definição formal (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1994), o que acabará trazendo problemas futuramente. Assim, os exemplos e contra-exemplos devem ser os mais variados, permitindo a construção de uma imagem conceitual que seja a mais geral possível, e mais próxima da definição formal.

Gray (1995) também critica a realização de actividades rotineiras e a continuação por um tempo excessivo de procedimentos restritivos criados pelos próprios alunos:

> Um dos problemas com as crianças pequenas é que elas passam tanto do seu tempo com aquela primeira aritmética de contagem que desenvolvem o domínio e a confiança em técnicas pessoais de contagem. Estas podem tornar-se respostas automáticas a combinações particulares mas sugerimos que esta é uma das razões pelas quais as relações numéricas subjacentes são obscurecidas. Devido à sua falta de sucesso na aritmética torna-se quase natural que algumas crianças recorram a esses procedimentos bem treinados e testados, mesmo se eles são difíceis de generalizar e podem até mesmo ser inapropriados para a tarefa em questão. Prática extensa na aritmética simples pode solidificar os próprios procedimentos de contagem que eventualmente levarão ao fracasso. (Gray, 1995, p. 40)

Isto é, o excesso de treinamento prende o aluno a determinados procedimentos (por exemplo de contagem, no caso da adição) que ele repete automaticamente, sem perceber que existem outras alternativas (como o uso do próprio conceito de adição) que lhe permitiriam chegar de uma forma mais fácil à solução.

Gray & Tall (1993) discutem a questão do sucesso e do fracasso em Matemática tomando por base a sua pesquisa sobre o modo como os alunos lidam com determinados conceitos matemáticos a que eles chamam de "proceptos". Segundo estes autores, essa noção de "procepto" se aplica àqueles conceitos de aritmética, da álgebra, da análise que são aprendidos inicialmente através de procedimentos, mas não se aplica aos conceitos que são aprendidos via definição, nem à maior parte dos conceitos da geometria que são introduzidos pelo via da percepção visual.

Tall & Gray observam que os alunos que têm sucesso em Matemática são aqueles que conseguem lidar com a simbologia matemática, ora entendendo o símbolo como um procedimento a ser realizado, ora percebendo nele o conceito subjacente, como no exemplo acima. Esses alunos conseguem mais facilmente relacionar factos matemáticos e fazer generalizações.

Por exemplo, o aluno que percebe o símbolo 6x8 como o produto 48 vai responder mais prontamente e com menos chance de erro do que o aluno que, face ao símbolo 6x8, vai fazer 12+12+12+12 (isto é, 6 vezes 2, mais 6 vezes 2, mais 6 vezes 2, mais 6 vezes 2), ou então 24+24 (isto é, 6 vezes 4 mais 6 vezes 4), que são procedimentos possíveis para chegar ao resultado 48, recorrendo à soma. O primeiro aluno faz uma Matemática mais fácil uma vez que ele é mais versátil no associar o símbolo com o conceito.

O segundo aluno, ao contrário, está preso ao procedimento, e pode até acertar os cálculos, mas vai fazer uma Matemática mais difícil porque vai repetir a todo momento cada etapa do processo. Esses procedimentos podem resolver as necessidades de cálculo por algum tempo mas, a longo prazo, esses alunos não desenvolverão as habilidades necessárias para um desempenho eficaz em Matemática. Essas habilidades, por sua vez, levarão ao desenvolvimento do "pensamento versátil" que Tall & Thomas 1991) colocam como condição necessária para se alcançar o sucesso em Matemática:

> Para se ser um matemático de sucesso é necessário algo mais do que a habilidade de realizar uma sucessão de passos mecânicos, sejam eles passos para realizar um cálculo numérico, resolver uma equação linear, diferenciar uma função composta, ou escrever uma demonstração matemática. O que também é necessário é uma imagem global da tarefa em questão, de tal modo que o caminho de solução mais adequado para ser seleccionado e que os erros que possam ocorrer sejam mais facilmente percebidos e corrigidos. Portanto o modo sequêncial/lógico/analítico de realizar uma sucessão de procedimentos matemáticos necessita ser complementado por uma visão global/holística do contexto. (Tall & Thomas, 1991, p.128)

Considerações finais

É muito positivo que o aluno desenvolva seus próprios procedimentos de cálculo no início da aprendizagem; entretanto, o seu uso prolongado pode ser um indicativo de que o aluno não transpôs alguma etapa do processo de aquisição de um conceito. Por exemplo, o aluno que continua usando o processo longo da divisão, é aquele que não adquiriu a versatilidade de cálculo necessária para efectuar um produto e uma diferença ao mesmo tempo.

Os exercícios de fixação da aprendizagem, se bem que necessários, podem se restringir a mero treinamento rotineiro com ênfase no procedimento, em detrimento da compreensão. Por exemplo, um aluno pode "resolver uma equação" do 2º grau e não saber "dar os valores de x" que anulam o trinômio $y=ax^2+bx+c$.

Estamos chamando a atenção para os procedimentos de ensino, que podem não estar contribuindo para a formação do conceito e para o desenvolvimento das habilidades necessárias para um bom desempenho em Matemática.

Até aqui baseamos as nossas observações na bibliografia consultada, no nosso trabalho sobre erros e na nossa própria prática docente. A partir de agora torna-se necessário aprofundar essas observações com uma análise mais apurada de livros didáticos, programas de ensino e procedimentos didácticos que nos levem a identificar textos, orientações e estratégias que estão promovendo, ou não o desenvolvimento do pensamento matemático.

Como resultado dessa análise estaremos propondo uma nova postura com relação ao ensino da Matemática que venha contribuir para o desenvolvimento das habilidades necessárias para que o aluno venha a ter sucesso em Matemática.

Notas:

(1) *Diagnóstico e análise de erros: subsídios para o aperfeiçoamento do processo ensino-aprendizagem em Matemática,* Relatório Técnico, Processo CNPq 404469 (87.6 (Dezembro 1991).

(2) Idem.

(3) Segundo Tall & Vinner, imagem conceitual é o termo que descreve a estrutura cognitiva total associada ao conceito e que inclui todas as imagens mentais e as propriedades e procedimentos a ele associados.

(4) Trata-se de uma série de palavras utilizadas para especificar aquele conceito, numa forma que é amplamente aceite pela comunidade matemática.

(5) Procepto é um objeto mental que consiste numa combinação de um procedimento com um conceito produzido por esse procedimento, e com um símbolo que pode ser usado para representar qualquer um dos dois, ou ambos. Exemplo: 3+2 é tanto o procedimento de adicionar 2 com 3, como o conceito de soma de 2 e 3.

Bibliografia

Foster, R. (1993). Practice makes imperfect? *Mathematics Teaching,* 143, 34-36.

Gray, E.M. (1995). Trying to get it right: A Perspective on Counting. In: P. Gates (Ed.). *Proceedings of the Joint Conference of BSRLM and AMET,* pp 36-40. Norhampton: UK

Gray, E. M. & Tall, D.O. (1993). Success & Failure in Mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics Teaching,* 142, 6-10.

Moren, E. B.; Machado, M.P. & David, M.M. (1992). Diagnóstico e análise de erros em Matemática: Subsídios para o processo ensino-aprendizagem. *Cadernos de Pesquisa,* 83, 43-51.

Tall, D. O. & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 125-147.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

Vinner, S. (1992). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: D.O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* pp. 65-81. Kluwer, Dordrecht.

Mª Manuela M. Soares David (FAE)
Mª da Penha Lopes Machado (ICEX)
Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil

Irene Lisboa

Irene Lisboa nasceu em 1892, fez os seus estudos em Lisboa e em 1914 termina o curso da Escola Normal Primária. Em 1915 é nomeada professora duma escola carenciada do Beato em Lisboa.

Irene Lisboa considera a escola capaz de ajudar a criança em todos os aspectos da educação. Defende uma Escola Nova, moderna e activa onde servindo-se dos meios práticos de ensinar bem, a escola se tornará um lugar onde a criança se sente à vontade. Opõe esta escola nova à escola tradicional ou passiva. Diz-nos que a escola passiva tem por missão ensinar o aluno, dar-lhe conhecimento livresco, só através de livros, e fechados entre quatro paredes. Enquanto a escola activa tem por missão dar igualmente à criança toda uma série de interesses e de acções compatíveis com a sua idade.

Irene Lisboa privilegia o brinquedo e o jogo como componentes educativos, além da história e do desenho.