Euler — uma ferramenta para o estudo de funções de duas variáveis

Olga Vaz e Maria Raquel Valença

Este artigo procura mostrar as potencialidades de uma aplicação do programa *Mathematica* como apoio ao estudo de funções de duas variáveis reais. Numa época em que visualizar é a palavra-chave do uso dos computadores no sistema educativo, a aplicação *Euler* constitui mais uma ferramenta útil na aprendizagem da Análise nos cursos do ensino superior.

É do conhecimento geral que as disciplinas da área da Análise dos cursos de Engenharia e Ciências estão, nas nossas Universidades e Institutos Superiores, entre as que têm maior insucesso. As condições em que geralmente são ministradas não são favoráveis à melhoria da situação e, por isso, é necessário começar a estruturar uma alteração dos métodos de aprendizagem.

Já em 1987, nas actas do colóquio "Calculus for a New Century: A Pump, Not a Filter", que reuniu em Washington mais de seiscentos matemáticos, cientistas e educadores, podia ler-se o seguinte comentário de um participante:

> In this age of Velcro, digital watches, and the HP28C, must one still learn to tie shoes, read two-handed clocks, and solve quadratic equations?

Mesmo não sendo tão radical, não é difícil aceitar que o uso de máquinas no ensino pode e deve ser sistematizado. Mas como? - é a primeira questão que se levanta. De acordo com especialistas em vários países (EUA, Inglaterra, França, Alemanha, Portugal), deve ser usado um novo paradigma no ensino da Matemática - a *visualização*. E para o implementar, os computadores são essenciais. Um estudo de T. Eisenberg e T. Dreyfus, publicado em 1991, mostra que, desde a infância, os alunos têm relutância em visualizar conceitos matemáticos. Uma das razões apontadas é o facto de o "pensamento visual" ser mais exigente do ponto de vista cognitivo. Nestas circunstâncias, o uso de máquinas, tão do agrado dos mais novos, pode ser o ponto de partida para ultrapassar esta barreira. Visualizar é, pois, a palavra-chave do uso dos computadores no sistema educativo.

O programa *Mathematica* é um sistema algébrico computacional que, efectuando de forma integrada cálculo numérico, simbólico e visualização, convida à elaboração de aplicações. A sua capacidade gráfica e a possibilidade de animação tornam-no excelente na implementação da visualização em Matemática.

O objectivo deste artigo é apresentar a aplicação Euler, que se destina a apoiar o estudo de funções de duas variáveis reais usando o programa *Mathematica*.

Apresentação da aplicação Euler

Existem já numerosos livros e aplicações baseados no *Mathematica* e destinados a várias disciplinas. Muitos são destinados ao estudo do Cálculo de uma Variável. Por isso mesmo pareceu-nos útil criar uma aplicação para o estudo de Funções de Duas Variáveis Reais. Esta aplicação, a que chamámos *Euler*, pretende ser um tutorial de como usar o *Mathematica* no estudo acima referido.

A aplicação *Euler* foi implementada para *Macintosh*. Está dividida em capítulos que abrangem os assuntos usualmente tratados em gráficos, derivadas parciais e integrais múltiplos, a saber:

- Apresentação
- Gráficos de superfícies
- Animação
- Derivadas parciais
- Gradiente
- Plano tangente e recta normal
- Pontos críticos
- Integrais duplos
- Integrais triplos

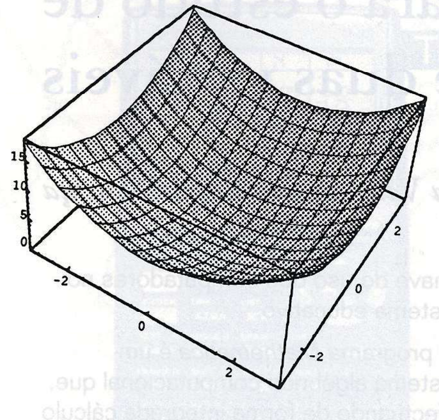

figura 1

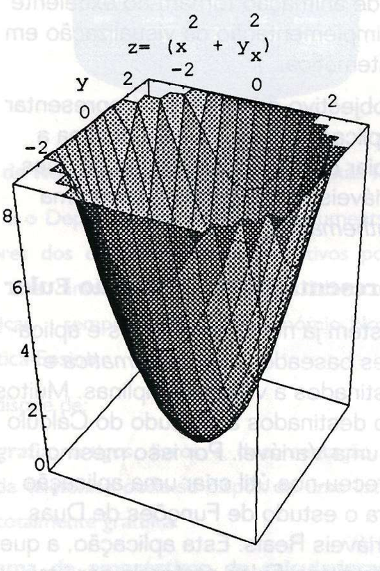

figura 2

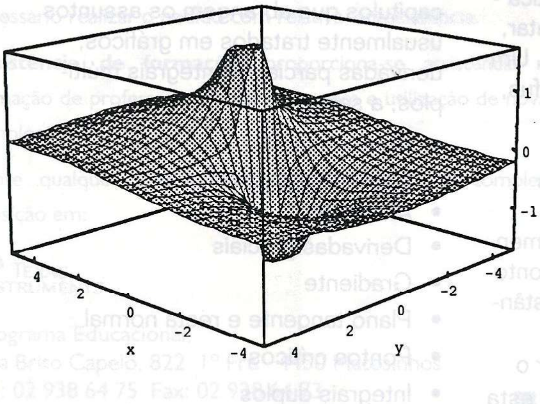

figura 3

Contém ainda uma "Apresentação" e uma "Introdução ao *Mathematica*", destinada aos utentes que pretendam iniciar-se. Foi dada especial ênfase à construção de gráficos, pelos motivos atrás apontados.

Nesse sentido, a aplicação foi construída intercalando "células"[1] de instruções necessárias à matéria atrás referida com "células" de texto explicativo.

A aplicação pode ser usada por pessoas com poucos conhecimentos do uso de computadores, e quase nenhuns do programa *Mathematica*.

Alguns exemplos do uso da aplicação

1. Visualização de uma superfície

O objectivo do capítulo 1 é mostrar como a aplicação pode ajudar a visualizar uma superfície, e em consequência entender melhor a função, no que respeita ao seu domínio, à continuidade, à existência de zeros e ao seu comportamento assimptótico. Nesse sentido, começámos por estudar o gráfico de uma função muito simples, a função definida por $f(x,y)= x^2+y^2$, cuja construção é feita passo a passo, introduzindo a expressão da função e os intervalos de representação para o x e o y:

```
Plot3D[x^2+y^2,{x,-3,3},{y,-3,3}]
```

Outras instruções adicionais permitem obter uma imagem mais completa e fiel:

Apresentam-se mais exemplos que ilustram diferentes situações. Outra função proposta é a função g definida por $g(x,y) = 2x/(x^2+y^2)$, cujo gráfico é aperfeiçoado até se obter a figura 3. Neste último caso, embora saibamos que a função g não está definida no ponto (0,0), o programa não apresenta nenhuma mensagem de erro. A figura dá uma boa imagem do comportamento da função na vizinhança de (0,0), mas falseia o seu comportamento nesse ponto.

Parece evidente que o professor deve ter, sobretudo em casos como este, um papel activo como descodificador das imagens. As linhas da "grelha" da segunda superfície mostram a partição feita (pelo próprio programa) no conjunto [-5,5] x [-5,5]. O professor poderá aproveitar para ajudar os alunos a visualizar as coordenadas cartesianas em 3D.

A aplicação foi construída de tal modo que o utilizador pode facilmente substituir de forma interactiva as funções apresentadas por outras, adaptando também os valores do domínio das variáveis, o tamanho dos eixos, o aspecto do gráfico ou os cálculos intermédios, convidando ao seu uso em outros casos, sem grandes alterações. Por exemplo, no subcapítulo "Como desenhar vários elementos juntos", e tendo sido anteriormente construídos os gráficos dos dois parabolóides — $f(x,y)=x^2+3y^2$ e $g(x,y) = 8-x^2-y^2$ — e o gráfico da sua linha de intersecção — uma "elipse" empenada — dada por um conjunto de pontos.

Podem-se definir instruções que ilustrem a construção, passo a passo, da figura 4.

Deste modo, pretendeu-se tornar a aplicação o mais interactiva possível, permitindo uma leitura acompanhada

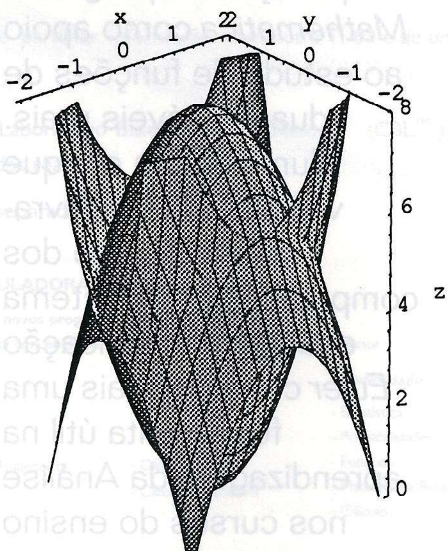

figura 4

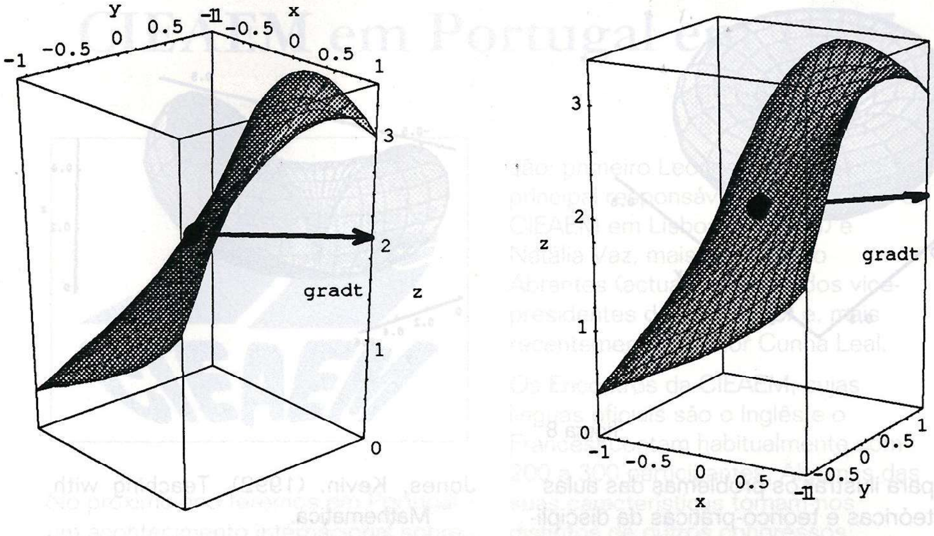

figura 5

das instruções e, consequentemente, a sua rápida adaptação pelo utilizador.

Sempre que as condições o permitam, Euler deverá ser usado nas aulas teóricas e teórico-práticas da disciplina. Nas primeiras, o professor poderá ilustrar com exemplos a matéria exposta; nas segundas, os alunos terão um auxiliar de resolução de problemas e uma ferramenta de exploração.

2. Noção de gradiente

O conceito de gradiente é, em geral, de difícil compreensão; optámos pois por introduzi-lo através do seguinte problema:

"A temperatura em cada ponto de uma placa de metal é dada pela função

$t(x,y)= e^x{*}\cos y + e^y{*}\cos x$

Em que direcção a temperatura cresce mais rapidamente a partir do ponto (0,0)?"

Definida a função t, o uso de uma "package" elaborada para o efeito permite obter o resultado pretendido. A resposta obtida é: *"a temperatura cresce mais rapidamente na direcção do vector (1,1)".*

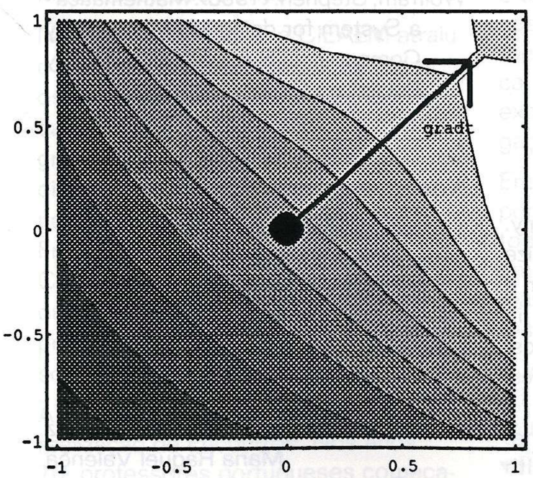

figura 6

Mais uma vez, a interpretação gráfica pareceu aqui muito adequada, quer através da representação da superfície e do vector gradiente (fig. 5), quer usando curvas de nível (fig. 6).

Cremos que a utilização de um exemplo concreto relativamente simples vai facilitar a compreensão do conceito de gradiente.

3. Cálculo de volumes - vantagens do uso do sistema de coordenadas apropriado

O cálculo de volumes usando integrais triplos exige que os alunos visualizem no espaço várias superfícies e as suas intersecções. Por isso, logo no capítulo 1 apresentámos o exemplo da figura 4. Este exemplo é retomado no capítulo 7- "Integrais triplos" onde as mesmas superfícies são também desenhadas em coordenadas cilíndricas (fig. 7).

Comparando as duas últimas figuras, o professor poderá mais uma vez explorar as "grelhas" das superfícies e mostrar aos alunos alguns casos nos quais as coordenadas cartesianas (sempre as preferidas) não são as mais indicadas.

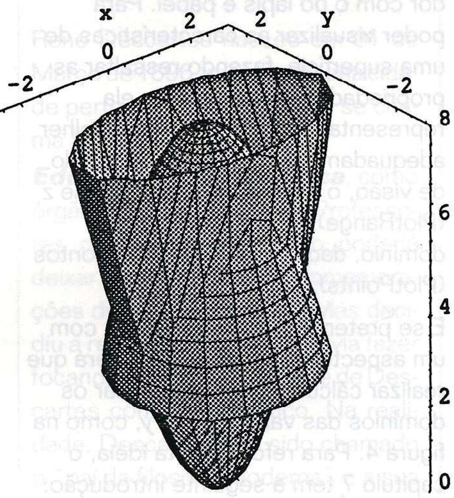

figura 7

Também o uso de coordenadas esféricas é, nesta aplicação, explorado com um exemplo onde nenhum outro tipo é indicado:

"Pretende-se calcular o volume limitado pela superfície de equação:

$(x^2+y^2+z^2)^2=2z(x^2+y^2)$ ".

É evidente, pelo aspecto da equação, que não devem aqui ser usadas coordenadas cartesianas. A equação anterior é equivalente à seguinte, em coordenadas esféricas:

$\rho = 2cos\phi sen^2\phi$.

A aplicação guia o utilizador no cálculo do volume pretendido, mas é extremamente difícil imaginar o aspecto da superfície, que se apresenta na figura 8, acompanhada de um seu corte.

Esta última figura poderá servir para chamar a atenção dos alunos para superfícies fechadas, que não são gráficos de funções no sentido usual do termo.

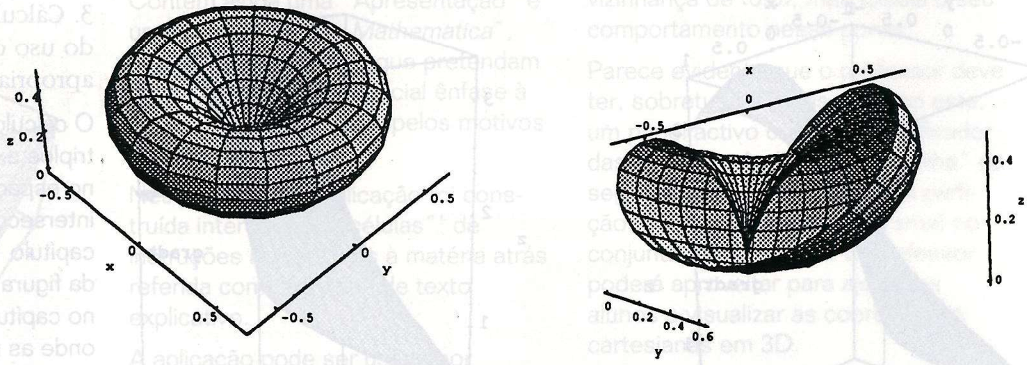

figura 8

Conclusão

A aplicação Euler pretende levar o utilizador a integrar o uso do computador com o do lápis e papel. Para poder visualizar as características de uma superfície, fazendo ressaltar as propriedades da função que ela representa, será necessário escolher adequadamente o domínio, o ângulo de visão, o intervalo de variação de z (PlotRange), ou até a partição do domínio, dada pelo número de pontos (PlotPoints).

E se pretende obter superfícies com um aspecto elegante, o aluno terá que realizar cálculos para determinar os domínios das variáveis *x* e *y*, como na figura 4. Para reforçar esta ideia, o capítulo 7 tem a seguinte introdução:

"Tal como no capítulo 6, também aqui será necessário que o utilizador realize alguns cálculos antes de introduzir as instruções."

A aplicação Euler contém ainda um subcapítulo dedicado à Animação, onde é possível ver uma superfície rodar em torno do eixo dos *xx*, dos *yy* ou dos *zz*. Espera-se que, deste modo, o utente possa construir uma imagem mais perfeita do objecto em estudo.

A aplicação foi usada na preparação de aulas, não só para obter resultados de cálculos um pouco complicados, mas sobretudo na elaboração de figuras que foram passadas a acetato para ilustrar os problemas das aulas teóricas e teórico-práticas da disciplina de Análise Matemática. Pretendemos que os utilizadores se sirvam dos exemplos que escolhemos para tirar a informação necessária (mas não suficiente) ao estudo que pretendem fazer. Deste modo, o programa estará sempre a ser modificado/adaptado a cada situação; não é estático, está em constante mudança. Por isso preconizamos o seu uso como (mais) uma nova ferramenta de trabalho.

Uma utilização mais alargada (como base de um curso, por exemplo) exige alteração dos métodos de ensino e das condições de trabalho. E o tempo usado em aprender a trabalhar com um programa desta complexidade não é tempo gasto. Como destaca o Professor Carvalho e Silva, *"um programa deste tipo não permite ganhar tempo mas compreensão"* e todos sabemos como o Ensino Superior está bem necessitado de uma mudança.

Referências bibliográficas

Eisenberg, Theodore, Dreyfus, Tommy. (1991). On the Reluctance to Visualize inMathematics. In W. Zimmermann e S. Cunningham, Visualization in Teaching and Learning Mathematics, MAA notes #19, U.S.A.: Mathematical Association of America.

Finch, James K., Lehmann, Millianne. (1992). Exploring Calculus with Mathematica. U.S.A.: Addison-Wesley Publishing C., Inc.

Jones, Kevin. (1992). Teaching with Mathematica.

The Mathematica Journal, vol 2, nº 4, 26 - 29.

Schneider, Edith. (1992). Computers: Change in the Teaching and Learning of Calculus. In European Mathematical Society, Newsletter, nº 5, 15.

Steen, Lynn Arthur. (1987). Calculus for a New Century: a Pump, Not a Filter, MAA notes #8, U.S.A.: Mathematical Association of America.

Tall, David. (191). Intuition and Rigour: the role of Visualization in the Calculus. In Walter Zimmermann e

Steve Cunningham, Visualization in Teaching and Learning Mathematics, MAA notes #19, U.S.A.: Mathematical Association of America.

Tucker, Thomas W. (1990). Priming the Calculus Pump: Innovations and Resources, MAA notes #17. U.S.A.: Mathematical Association of America.

Wolfram, Stephen. (1988). Mathematica - a System for doing Mathematics by Computer. U.S.A.: Addison-Wesley Publishing C., Inc.

Nota

1 Todas as aplicações do *Mathematica* estão organizadas em "células", que contêm texto, gráficos, "input" ou "output", e são indicadas por um parêntesis recto à direita do écran.

Olga Vaz

Maria Raquel Valença

Departamento de Matemática da Universidade do Minho