Para este número seleccionámos...

Henry Borenson é, praticamente, desconhecido entre nós. A inclusão de um artigo seu nesta secção não se justifica, assim, pela importância da sua obra, mas, somente, pelo conteúdo do artigo em si mesmo.

Trata-se do relato de uma aula em que se procura iniciar alunos do sétimo ano de escolaridade no processo de investigação em Matemática. Não sendo, uma aula exemplar, vale no entanto pelo seu propósito e pelas concepções, implícitas, que a suportam. Parece-nos que o autor se situa numa perspectiva, dita «falibilista», da construção do corpo de conhecimentos matemáticos. Esta é a perspectiva defendida por Lakatos que afirma ter a Matemática um crescimento semelhante ao das ciências experimentais. Partindo de um problema ou de uma conjectura, há uma procura simultânea de demonstrações e contra-exemplos; novas demonstrações explicam os contra-exemplos, novos contra-exemplos colapsam essas mesmas demonstrações. Assim, a demonstração não é um processo que assegure a transmissão da verdade, numa cadeia ininterrupta e inquebrantável, das hipóteses até às conclusões. É, antes, um processo complexo em que, sob a pressão dos contra-exemplos, as definições e os passos da demonstração se vão precisando e detalhando, tornando, assim, a conjectura mais plausível até se tornar inexpugnável ao criticismo.

Ensinando o Processo de Investigação Matemática

Jenry Borenson

A chave do processo investigativo é o conceito de raciocínio indutivo, isto é, o processo que conduz a uma generalização com base num conjunto limitado de factos específicos.

Haverá poucos estudantes que não tenham utilizado, já, este tipo de raciocínio na sua vida diária. Na verdade, desde muito cedo, que as crianças aprendem que, gritando, chamam sobre si a atenção dos adultos. O garoto, que conclui que «odeia» raparigas porque não gosta da irmã, raciocinou, também indutivamente. Basta então proporcionar a aplicação deste tipo de raciocínio na área da Matemática. É este processo que torna possível a investigação criativa, embora as conclusões a que se chega nem sempre sejam verdadeiras.

O relato que se segue ilustra uma abordagem à investigação criativa e à formulação de conjecturas na sala de aula.

Tratava-se da noção de diagonal de um polígono. Acompanhei a definição de diagonal com o traçado de duas diagonais de um pentágono tiradas do mesmo vértice (fig. 1). «Quantas diagonais tem um pentágono?», perguntei de seguida. «Dez», respondeu o Marco. Como há duas diagonais com origem no vértice A e como os vértices são cinco, então as diagonais de um pentágono devem ser dez — deve ter pensado o Marco. «Toda a gente está de acordo?», perguntei eu. Depois de um curto período de reflexão e de algum trabalho com papel e lápis, os alunos concluiram que o pentágono tinha só cinco diagonais.

Achei então oportuno pôr a seguinte questão: «Já várias vezes falámos, aqui, em raciocínio indutivo e na formulação de conjecturas. Observem o desenho no quadro (fig. 2). Alguém quer propor uma conjectura?» Ime-

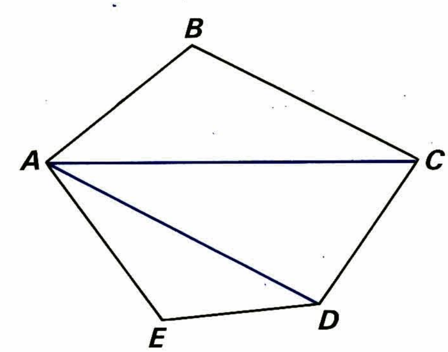

Fig. 1 — Estão desenhadas duas diagonais. Quantas seriam se as tivéssemos desenhado todas?

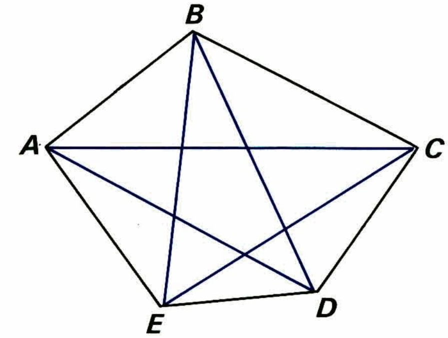

Fig. 2 — A conjectura da Alice: num polígono de cinco lados, as diagonais formam uma estrela.

diatamente vários braços se levantaram. Algumas das conjecturas eram verdadeiramente surpreendentes. (Antes de continuar a ler não quer, também, formular a sua própria conjectura?) Seguem-se as principais conjecturas propostas pelos alunos, tal como foram escritas no quadro:

1. A conjectura do Marco: Um pentágono tem sempre cinco diagonais;
2. A conjectura da Susana: Há tantas diagonais quantos os lados do polígono;
3. A conjectura do Rui: Em qualquer pentágono, de cada vértice saem duas diagonais;
4. A conjectura da Alice: Num polígono de cinco lados, as diagonais formam uma estrela (fig. 2);
5. A conjectura do Marco: Se as diagonais de um pentágono se intersectam, formando uma estrela, então o «centro» dessa estrela é um pentágono (fig. 3).

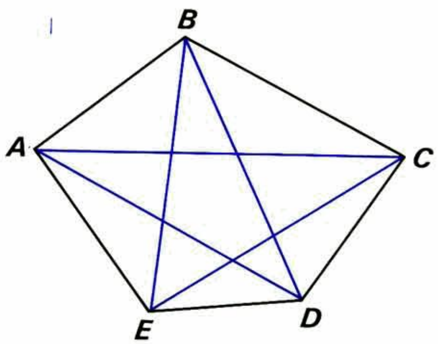

Fig. 3 — Conjectura do Marco: se as diagonais de um pentágono se intersectam, formando uma estrela, então o «centro» desta estrela é uma pentágono.

Tanto a conjectura 4 quanto a conjectura 5 eram novas para mim.

Dividi, depois, a turma em grupos de quatro alunos cada um e propus-lhes que avaliassem da veracidade ou da falsidade das diferentes conjecturas. Cada grupo teria, depois, de transmitir e defender as suas conclusões ao resto da turma.

Os alunos meteram mãos à obra numa tremenda excitação. Eu andei por entre os alunos, atento ao seu trabalho, ouvindo os seus argumentos, prescrutando o seu pensamento. Quinze minutos depois, a turma reorganizou-se para encetar a discussão em grande grupo. A Marta foi ao quadro e apresentou um contra-exemplo à conjectura 2. Um quadrilátero, observou ela, tem quatro lados e, apenas, duas diagonais. Um outro aluno chamou a atenção para o triângulo que, tendo três lados, não tem qualquer diagonal. Então a turma toda concluiu que a conjectura 2 era falsa. Para refutar a conjectura 4, a Rosita e o Roberto desenharam, no quadro, os pentágonos e respectivas diagonais que constam da figura 4. Em qualquer dos casos a turma concurdou que as figuras formadas pelas diagonais não eram, de facto, estrelas.

Como o tempo de aula se aproximasse do fim, pedi aos grupos que apresentassem as restantes conclusões por escrito. Pude ver, assim, que a maioria dos algunos consideravam verdadeiras as conjecturas 1, 3 e 5. Porém, alguns alunos admitiam a existência e davam exemplos de pentágonos em que algumas diagonais se sobrepunham a outras ou se justapunham, mesmo, aos lados (fig. 5).

Mas o toque da campainha não fez esmorecer o interesse pelo assunto. Ter visto as conjecturas designadas com os nomes dos colegas, motivou outros alunos a formularem às suas próprias conjecturas. O trabalho de grupo encorajou-os a partilhar ideias e a aprender uns com os outros. A procura de contra-exemplos às conjecturas formuladas constituiu um desafio estimulante. E, para além das capacidades desenvolvidas, sentiram, sobretudo, quão excitante é o processo de investigação matemática.

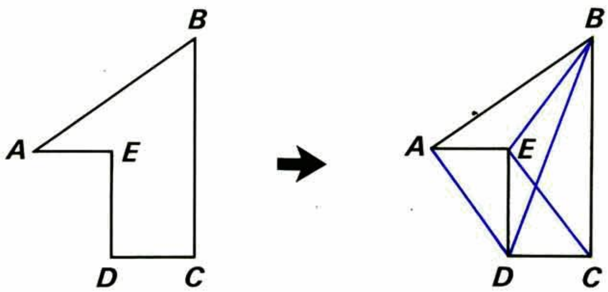

Fig. 4 — A turma concordou que nem sempre as diagonais de um pentágono formam estrelas.

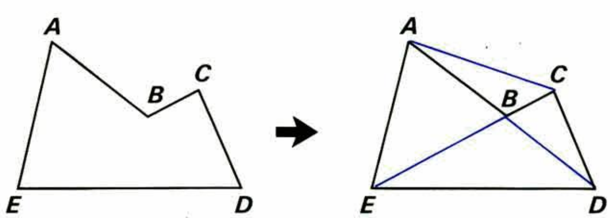

Fig. 5 — A diagonal CE sobrepõe-se à diagonal BE e ao lado BC. A diagonal AD sobrepõe-se à diagonal BD e ao lado AB.

Tradução de *Leonor Moreira* e *Eduarda Fonseca*