Incentivando a visualização espacial através de propriedades geométricas de tetraedros duais

Ana Maria Kaleff e Dulce Monteiro Rei

As dificuldades apresentadas pelos alunos na visualização de sólidos geométricos têm levado os educadores a buscarem meios para facilitar o ensino das propriedades geométricas dos sólidos e para tornar esse ensino mais atrativo e motivador.

Neste artigo trataremos de situações nas quais até mesmo adultos apresentam dificuldades de visualização, observadas pela não distinção entre os conceitos de forma e de volume de um sólido geométrico. Apresentaremos atividades que recorrem ao uso de materiais concretos e que não somente contribuem para o desenvolvimento do raciocínio espacial do estudante, mas também lhe proporcionam oportunidade de desenvolver a coordenação motora, de aprender a se concentrar numa tarefa, de exercitar a paciência, de criar imagens, de interpretar desenhos, de conjectURAR e intuir soluções para problemas matemáticos elementares e de observar e fazer uso de diversas relações geométricas. O sólido geométrico de que trataremos é o tetraedro regular, relacionado ao seu dual.

Na nossa prática escolar temos utilizado materiais concretos para a construção de estruturas que representam esqueletos de sólidos geométricos construídos por meio de suas arestas. Os materiais de nossa preferência para tais construções são pedaços de canudos de plástico unidos por meio de um fio de linha e varetas finas de madeira unidas por anéis elásticos. As atividades de construção de esqueletos de sólidos podem ser iniciadas com crianças pequenas e auxiliam a criação de imagens mentais e o desenvolvimento do raciocínio espacial, como já apresentamos em outros trabalhos e que estão citados ao final deste artigo. As atividades que apresentamos a seguir são mais indicadas para jovens e adultos, com cerca de quinze anos de idade, e nelas são tratadas relações entre volumes de tetraedros e relações entre áreas de suas faces, as quais surgem naturalmente no processo de construção dos esqueletos de dois tetraedros duais.

Nas Atividades 1 e 2, os alunos são orientados na construção do esqueleto de um tetraedro regular e de seu dual e são levados a observar que os mesmos são semelhantes, surgindo a situação-problema do estabelecimento da relação entre seus volumes e entre as áreas de suas faces.

Nas Atividades 3, 4 e 5 são apresentadas construções que podem parecer, à primeira vista, difíceis e árduas, porém uma leitura atenta das indicações sobre a manipulação do material levará ao sucesso. Propositalmente, tentamos evitar que as orientações sobre a manipulação do material sejam apoiadas nos desenhos dos esqueletos e em esquemas de construção, pois buscamos incentivar a compreensão do texto escrito, além de termos em mente as dificuldades que muitos alunos apresentam na interpretação de desenhos. Nossa experiência nos mostra que a maioria dos estudantes se beneficia com atividades como as aqui apresentadas, pois os alunos necessitam ser orientados em atividades que os ajudem a desenvolver imagens mentais dos sólidos e os auxiliem a perceber figuras espaciais desenhadas no plano.

As perguntas que surgem ao longo das construções propostas levam o aluno a conjectURAR sobre diversas situações geométricas, que são importantes para as conclusões finais.

Há situações nas quais até mesmo adultos apresentam dificuldades de visualização. As atividades de construção de esqueletos de sólidos podem ser iniciadas com crianças pequenas e auxiliam a criação de imagens mentais e o desenvolvimento do raciocínio espacial.

O constante questionamento sobre o que o aluno constrói e sobre o que ele observa, lhe proporciona a oportunidade de tomar consciência das diversas propriedades geométricas que desejamos enfatizar.

A seguir, apresentamos as atividades em questão e alguns comentários que julgamos pertinentes. Sugerimos que se tenha, à mão, canudos plásticos de refrigerante de mesma espessura, em três cores diferentes; varetas de madeira fina; anéis elásticos, palitos de madeira que se ajustem aos canudos quando neles inseridos; uma agulha grossa e um carretel de linha de algodão. A textura da linha deve ser de tal ordem que permita sua inserção no canudo sem auxilio de uma agulha e sua espessura deve ser tal que o canudo possa permitir a passagem de até cinco trechos de linha.

O material a ser utilizado nas Atividades 1 e 2 é um metro de linha, seis pedaços de canudo plástico de mesma cor e comprimento (sugerimos a medida de oito centímetros) e um canudo de uma outra cor. Além disso, nos esquemas que se seguem, indicaremos por $\longrightarrow$ o sentido em que a linha deve ser inserida num canudo vazio e indicaremos por $\Longrightarrow$ o sentido em que ela deve ser inserida num canudo já ocupado por outro pedaço de linha.

Nas construções das estruturas, é importante se observar que, para se dar firmeza aos vértices, é necessário reforçá-los, passando o fio de linha mais de uma vez por cada pedaço de canudo, ligando-o aos outros dois. O esquema apresentado na figura 2 ilustra esta situação.

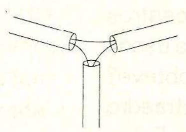


figura 2

Note-se que, em todo trabalho que se segue, nos referiremos às estruturas construídas pelo nome dos sólidos geométricos cujas arestas elas representam.

Acreditamos que a sequência realizada na atividade 2 seja muito importante, pois deste modo, o aluno tem oportunidade de observar e de ter enfatizado, entre outros fatos, que as figuras que conservam as formas são figuras semelhantes.

Além disso, temos observado que, muitos alunos universitários, bem como professores de 1° e de 2° graus apesar de calcularem corretamente a relação entre os volumes dos sólidos duais tratados, ao serem solicitados a justificar esse resultado por meio do desenho ou da construção de um modelo que represente a situação, tentam justapor vinte e sete tetraedros regulares, cujas arestas têm o mesmo comprimento das do tetraedro dual, para construir um tetraedro como o original. Após fazerem várias tentativas, nas quais o objetivo não é alcançado, eles apresentam manifestações de espanto e descrédito, pois estão convencidos de poderem obter o tetraedro original por meio do empilhamento de vinte e sete tetraedros da mesma forma e tamanho do dual. Esta situação indica que o conceito de volume do poliedro e o conceito de forma do poliedro são confundidos até por professores e que, mesmo adultos, têm, portanto, dificuldades de visualizar situações geométricas como as aqui tratadas. Com as atividades que se seguem tentamos minimizar estas situações.

Para a realização da atividade 3 serão necessárias dezoito varetas de madeira, sendo seis delas com o dobro do comprimento das demais e dezoito pedaços de canudos, sendo seis de uma mesma cor e doze de uma outra cor, medindo, respectivamente, doze e seis centímetros. Sugerimos estas medidas, pois, pedaços de canudos maiores facilmente se danificam.

ATIVIDADE 1

Construção de um tetraedro regular

Tome o fio de linha, passe-o através de três pedaços de canudo construindo um triângulo e o feche por meio de um nó. Agora, passe o restante da linha por mais dois pedaços de canudo juntando-os e formando mais um triângulo com um dos lados do primeiro triângulo. Finalmente, passe a linha por um dos lados deste triângulo e pelo pedaço que ainda resta, fechando a estrutura com um nó. Esta estrutura representa as arestas de um tetraedro regular e as etapas intermediárias de sua construção estão representadas no esquema da figura 1.

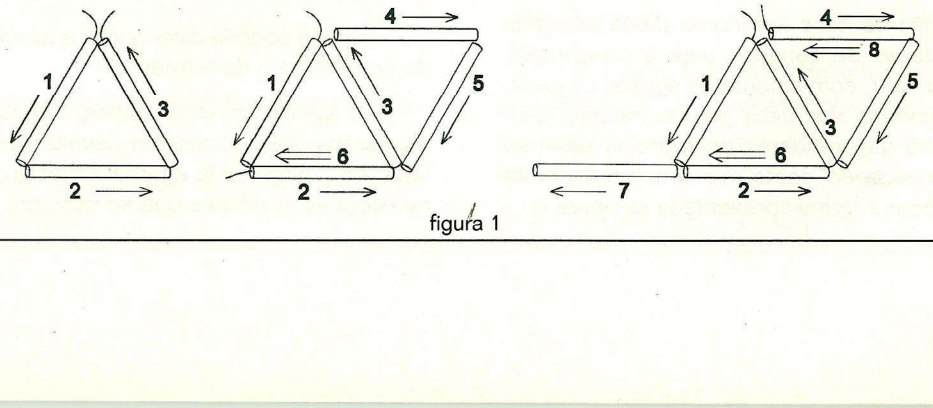


figura 1

ATIVIDADE 2

Construção de tetraedros duais

Em cada face do tetraedro construído anteriormente construa, com um fio de linha, as três medianas relativas a cada um dos vértices. Na construção de cada mediana, prenda a linha em um dos vértices e com a ponta da agulha, fure o canudo no qual ficará presa essa mediana e nele prenda a linha por meio de um nó.

Você deve estar lembrado que o ponto onde as medianas se encontram, numa mesma face, é chamado de baricentro do triângulo. Agora, una os quatro baricentros por meio de pedaços de canudos de cor diferente da usada na construção do tetraedro. Que estrutura você obteve? Observe que esta estrutura tem a mesma forma do tetraedro inicial sendo, portanto também um tetraedro regular. Estes sólidos são chamados de duais e no restante deste trabalho chamaremos o tetraedro menor, obtido desta forma, de tetraedro dual. As estruturas assim construídas estão representadas na figura 3.

Observe as estruturas construídas analisando as características geométricas que se conservaram entre elas. Agora meça o comprimento de cada mediana de uma face e a distância entre o baricentro e o pé dessa mediana. Você é capaz de dizer qual é a relação entre esses comprimentos? E qual a relação que existe entre o comprimento da aresta do tetraedro original com o da aresta do dual?

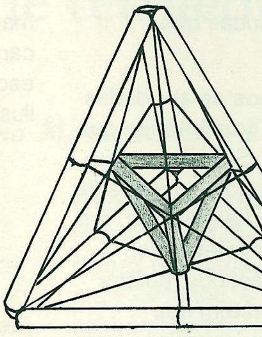


figura 3

Você deve ter observado que esses comprimentos são proporcionais, pois a relação entre eles é 3/1, donde pode-se concluir que o tetraedro original e o seu dual são figuras semelhantes, cuja razão de semelhança é 3.

Agora, você é capaz de estabelecer a relação entre as áreas de cada face dos dois tetraedros? E qual é a relação entre os volumes dos dois tetraedros?

Mesmo que você consiga responder a estas questões sugerimos que continue com as atividades que se seguem, pois elas visam construir, com pedaços de canudos, o esqueleto de um sólido que representa esta situação .

ATIVIDADE 3

Construção de um octaedro dentro de um tetraedro

Inicialmente, construa o esqueleto de um tetraedro regular com as varetas grandes que devem ser amarradas entre si por meio dos anéis elásticos. Considerando as arestas que formam cada uma das faces do tetraedro, una os pontos médios destas arestas pelos pedaços pequenos de vareta, amarrando-os também por meio dos anéis elásticos.

Quantos pedaços de vareta você utilizou e que estrutura espacial você obteve?

Você deve ter notado que esta estrutura é a de um octaedro regular.

Agora, repita os itens anteriores desta atividade utilizando os pedaços de canudos para a construção. Você necessitará furar, com a ponta da agulha, os pedaços maiores de canudo nos seus pontos médios, para poder passar a linha que prenderá o octaedro na estrutura do tetraedro. Procedendo desta maneira, você obterá uma construção com a forma apresentada na figura 4.

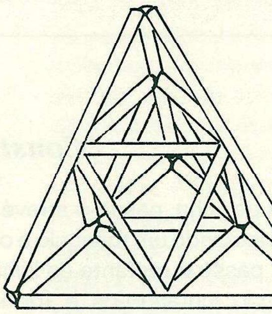


figura 4

Você poderia dizer qual é a relação entre o volume do octaedro e o do tetraedro ?

Fazendo uso do esqueleto do octaedro construa os elementos que possibilitem visualizar esta relação. Caso você sinta dificuldade em realizar esta construção, continue com as atividades que se seguem.

ATIVIDADE 4

Relações entre os volumes e entre as áreas das faces dos sólidos construídos dentro do tetraedro

Indicaremos por T o tetraedro que você construiu na atividade anterior e chamaremos de V o seu volume. Observando o interior de T, você vê um octaedro, que tem construído sobre quatro de suas faces um tetraedro regular. Indicaremos por T_p cada um desses tetraedros, cujo volume será indicado por V_p e indicaremos por V_o o volume do octaedro.

Olhando para a estrutura que você tem nas mãos, observe que $V = 4V_p+V_o$

Você seria capaz de estabelecer uma relação entre os volumes V_p e V_o?

Você seria capaz de construir, com pedaços de canudo, uma estrutura que o auxiliasse a estabelecer essa relação?

Para tanto, com um pedaço de canudo, de cor diferente das já utilizadas, construa uma diagonal do quadrado que forma o octaedro.

Você pode observar que, com esta diagonal, foram construídos quatro tetraedros não regulares, cada um formado por dois triângulos equiláteros (faces do octaedro) e dois triângulos isósceles (formados pela diagonal do quadrado e por duas arestas do octaedro). Observe a figura 5.

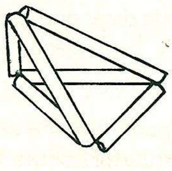
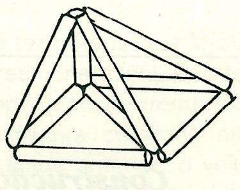


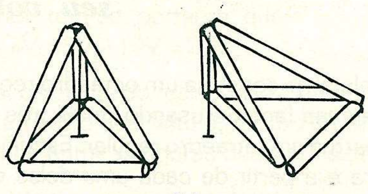
figura 5

Você percebeu que cada tetraedro não regular tem a mesma altura de T_p?

Os esquemas desenhados na figura 6, (a) e (b), representam esta situação.



(a)



(b)

figura 6

Além disso, observe ainda que, como as bases desses dois tetraedros, em relação a esta altura são iguais, então eles têm o mesmo volume. Portanto, o volume do octaedro é igual a quatro vezes o volume do tetraedro regular T_p, isto é, $V_o=4V_p$. Daí, $V=4V_p+V_o=4V_p+4V_p=8V_p$.

Portanto, o volume do tetraedro T é oito vezes o volume do tetraedro T_p, apesar de T não ser construido por oito tetraedros de mesma forma de T_p. Isto é, você vê que T é formado por quatro tetraedros não regulares e quatro tetraedros de mesma forma de T_p, apesar de todos terem volume igual ao de T_p.

Além disso, você deve ter observado que o comprimento da aresta do tetraedro T, que indicaremos por L, é o dobro do comprimento da aresta do octaedro e, portanto, o dobro do comprimento da aresta do tetraedro T_p, que indicaremos por l. Logo, $L/l = 2$.

Da relação anterior temos que $V/V_p = 8$, logo

$V/V_p=(L/l)^3=2^3$

Por outro lado, você deve ter notado que as faces do tetraedro T são formadas por quatro triângulos iguais aos que formam as faces de T_p, donde a relação entre as áreas

$T/T_p=4$ logo $T/T_p=(L/l)^2=2^2$

Em geral, ao compararmos a estrutura de um sólido obtida com os canudos com a estrutura obtida com varetas, notamos que a representação com canudos fornece um esqueleto melhor definido para o sólido em questão, onde sua forma é melhor caracterizada, porém, temos observado, que a manipulação dos canudos é bem mais trabalhosa, exigindo dos alunos uma habilidade manual maior do que a necessária para a construção por meio das varetas.

Por outro lado, a fim de tornar uma estrutura construída com canudos menos frágil e de mais fácil manipulação, podemos orientar os alunos para que a reforcem, inserindo nos canudos pedaços de palito de madeira que se ajustem ao canudo.

Para realizar a atividade 5 são necessários quarenta e dois pedaços de canudo de mesma cor e com seis centímetros de comprimento.

Temos observado que alguns poucos alunos, ao realizarem esta atividade, preferem observar diretamente a figura 9 e construir a estrutura aí apresentada, sem seguir a sequência sugerida. Isto nos indica que tais alunos já conseguem interpretar corretamente o esquema desenhado, todavia, a grande maioria dos estudantes necessita seguir, passo a passo, a construção sugerida, o que pode ser um exercício de paciência e que exige muita concentração.

ATIVIDADE 5

Construção de uma figura auxiliar e a relação do seu volume com o do tetraedro dual

Inicialmente construa um octaedro regular. A partir de uma de suas faces e usando mais três pedaços de canudo construa um tetraedro regular. Escolha duas faces do tetraedro e a partir de cada uma delas construa um octaedro regular, formando assim uma estrutura com três octaedros e um tetraedro, a qual terá uma face superior e uma base com as formas desenhadas na figura 7.

Face Superior *Base Inferior*

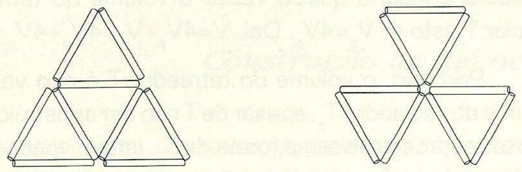


figura 7

Observe que para cada dois dos octaedros construídos haverá uma aresta comum com o tetraedro. Entre cada um dos pares de octaedros, construa um tetraedro usando essa aresta comum, duas arestas de um dos octaedros, duas arestas do outro octaedro, acrescentando mais um canudo para formar a sexta aresta. Observe, que a figura construída terá quatro tetraedros e três octaedros podendo ser apoiada sobre uma base como desenhada na figura 8.

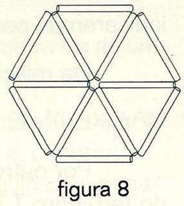


figura 8

Acrescente três tetraedros a essa estrutura. Para a construção de cada um desses tetraedros, acrescente três arestas àquela face de cada um dos três octaedros, que possui apenas uma aresta na base da estrutura.

Observe que a estrutura que você construiu pode ser apoiada numa base triangular, subdividida em nove triângulos . Além disso, você deve ter obtido uma estrutura como a representada na figura 9 .

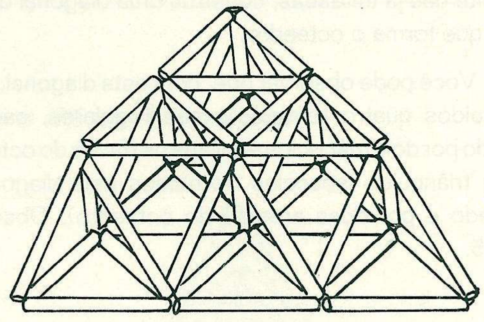


figura 9

Você é capaz de dizer qual é o volume dessa figura, que indicaremos por V_b, em relação ao volume de T_p isto é, V_b/V_p?

Observe que para formar a estrutura que você tem nas mãos, você construiu três octaedros e sete tetraedros. Como cada um dos octaedros tem por volume, $V_o=4V_p$, então $V_b=3V_o+7V_p=3(4V_p)+7V_p=19V_p$.

Então, o volume dessa figura é dezanove vezes o volume do tetraedro T_p. No entanto, você pode observar que a estrutura não é formada por dezanove tetraedros da mesma forma de T_p, mas por três octaedros e por sete tetraedros da forma de T_p.

ATIVIDADE 6

Relações entre os volumes e entre as áreas das faces dos tetraedros duais

Coloque a estrutura que você construiu na Atividade 4 sobre a construída na atividade anterior. Não levando em conta as arestas duplas, localizadas na região onde uma estrutura se apoia sobre a outra, o que você observa? Você obteve uma estrutura com a forma representada na figura 10 e nela você consegue identificar o tetraedro dual no interior do tetraedro grande?

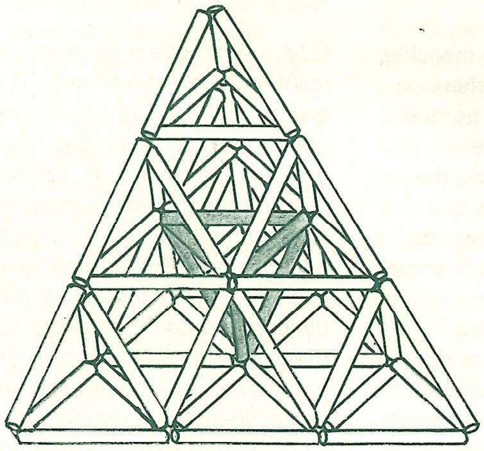


figura 10

Agora, analise novamente as questões que você respondeu na Atividade 2. Você já é capaz de responder qual é a relação existente entre os volumes do tetraedro grande, que indicaremos por V_t e do tetraedro dual, que indicaremos por V_d?

Você deve ter notado que $V_d=V_p$, pois todos os tetraedros regulares construídos no interior do tetraedro têm o mesmo comprimento de aresta. Como, da Atividade 4, o volume da estrutura colocada na parte superior é $V=8V_p$ e, da atividade anterior, o volume da estrutura colocada na parte inferior é $V_b=19V_p$ então, como a estrutura formada pelas duas é igual a do tetraedro tendo o dual no seu interior, tem-se, portanto, que

$$V_t=V+V_b=8V_p+19V_p=27V_d.$$

Logo, o volume do tetraedro é vinte e sete vezes o volume do tetraedro dual, isto é, o cubo do valor da razão de semelhança entre as figuras duais consideradas.

No entanto, apesar do tetraedro inicial ter um volume 27 vezes maior do que o tetraedro dual T_p, você pode observar, na estrutura considerada e como descrito na atividade anterior, que ela não é costruída por 27 tetraedros da forma de T_p.

Além de tudo que você já observou, ainda pode constatar, através da contagem do número de triângulos equiláteros que formam as faces dos tetraedros duais, que a relação entre as suas áreas é nove, isto é, o quadrado do valor da razão de semelhança entre essas figuras.

Por meio das atividades apresentadas, buscamos descrever uma forma de levar o aluno a estabelecer relações e fórmulas geométricas, não apenas através de deduções apoiadas na observação de desenhos de sólidos representados no plano, mas como consequência de um processo de observação e análise das características e propriedades das formas dos sólidos ou de partes deles, como objetos do espaço tridimensional.

Estamos convencidos de que processos nos quais o aluno tem incentivada a habilidade de visualizar figuras geométricas espaciais não somente contribuem para o desenvolvimento do raciocínio espacial, mas também favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico-abstrato, preparando o aluno para estudos matemáticos mais avançados.

Bibliografia

Kaleff, A.M. (1994). Tomando o Ensino da Geometria em nossas mãos.... *A Educação Matemática em Revista, nº 2*, pp. 19 - 25.

Kaleff, A.M., Henriques, A., Rei, D.M. e Figueiredo, L.G. (1994). Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. *Bolema, nº 10*, pp. 21-30.

Kaleff, A.M. e Rei, D.M. (1995). Vareta, canudos, arestas e...sólidos geométricos. *Revista do Professor de Matemática, nº 28*, pp. 29 - 36.

Lindquist, M. e Shulte, A. (eds.) (1994). *Aprendendo e ensinando Geometria.* Atual Editora, São Paulo.

Ana Maria Kaleff,
Professora Adjunta do Departamento de Geometria da Universidade Federal Fluminense-UFF, Niterói-RJ, Brasil.
Mestre em Matemática, responsável por projetos de pesquisa e de aplicação de metodologias do ensino de Geometria.

Dulce Monteiro Rei,
Professora Auxiliar de Ensino do Departamento de Geometria da UFF e da Rede Municipal de Ensino de Angra dos Reis - Rio de Janeiro