Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios

Seiji Hariki

Muitas vezes, os problemas de cálculo combinatório são simplesmente tratados como exercícios para aplicar uma fórmula acabada de expor, seja a dos arranjos, das permutações ou das combinações. Encarados deste modo, os problemas combinatórios tornam-se difíceis quando surgem fora de um contexto teórico óbvio. Neste artigo, apresentam-se argumentos e exemplos procurando mostrar que estabelecer conexões entre diferentes problemas combinatórios pode constituir uma boa estratégia de resolução deste tipo de problemas.

Introdução

Problemas combinatórios são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente: é difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o princípio multiplicativo.

Esta dificuldade não é muito visível quando se utiliza um livro-texto, pois se o problema é proposto como exercício no fim de uma seção, é óbvio que ele deve ser conectado com a teoria exposta na mesma seção, ou então que se deva observar os exemplos e exercícios resolvidos nessa mesma seção. A dificuldade torna-se patente quando o problema é apresentado isoladamente, fora de um contexto teórico óbvio, por exemplo, num exame vestibular. Neste artigo não vamos cuidar desse aspecto, isto é, da relação entre o problema combinatório e a teoria; em vez disso, vamos tratar das conexões entre problemas combinatórios. Argumentamos que o estabelecimento dessas conexões constitui-se numa boa estratégia de resolução de problemas combinatórios.

1. Estratégia da Conexão

Uma das perguntas heurísticas de George Polya é: conheces um problema correlato? A *estratégia da conexão* consiste exatamente na busca de problemas relacionados ao problema combinatório dado. Nesta seção visamos ilustrar com um exemplo o funcionamento desta estratégia.

Vamos trabalhar com o seguinte problema que encontramos num texto de análise combinatória (Bachx et al., p. 107).

PROBLEMA 1:

De quantos modos se pode pintar 6 esferas iguais, usando-se apenas 3 cores diferentes?

Este problema é proposto pelos autores como exercício no fim do capítulo sobre equações lineares com coeficientes unitários. Vejamos então como resolver este problema dentro desse contexto. Digamos, para fixar as ideias, que as cores sejam Amarelo, Branco e Verde.

Antes de qualquer coisa, observemos que o enunciado é obscuro: é dito que devemos utilizar **apenas** 3 cores diferentes; isto implica obviamente que não podemos utilizar mais do que três cores. No entanto, não é claro quanto a podermos utilizar somente uma cor ou somente duas cores.

Esta falta de clareza é bastante comum nos problemas combinatórios. Para resolver o problema, vamos arbitrariamente assumir essas possibilidades. Admitiremos, por exemplo, que podemos pintar todas as esferas de amarelo, ou então algumas delas de amarelo e as restantes de verde.

Para equacionar o problema, seja x o número de esferas pintadas de amarelo, y o número de esferas pintadas de branco, e z o número de esferas pintadas de verde. Temos que

$$x + y + z = 6$$

O nosso problema é então equivalente ao seguinte problema "puramente" matemático.

PROBLEMA 2:
Determinar o número de soluções inteiras não negativas da equação linear com coeficientes unitários

$x + y + z = 6$

Sabemos, pela teoria exposta no capítulo do livro-texto, que este número é igual ao número de combinações de 8 (=6+3-1) objectos, tomados 2 (=3-1) a 2, isto é, é igual a 28. Portanto, há 28 modos de se pintar 6 esferas iguais, usando-se 3 cores diferentes.

Para os leitores do mencionado livro-texto, a conexão entre os problemas 1 e 2 é canonicamente esperada, pois trata-se de conectar um exercício de fim de capítulo com a teoria exposta no capítulo.

A análise combinatória é no entanto muito mais rica. Vamos agora mostrar que existem outros modos de resolução, ou melhor, que existem outros problemas analogicamente conexos ao nosso problema. Verifiquemos primeiramente que o nosso problema é análogo (mais do que análogo, é equivalente) ao seguinte problema de colocar bolas em urnas.

PROBLEMA 3:
Temos 3 urnas A, B e V. De quantas formas podemos colocar nelas 6 bolas indistinguíveis, podendo eventualmente uma (ou duas) das urnas ficar vazia?

Qual é a analogia?

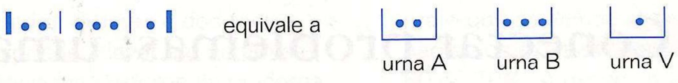
"Pintar uma esfera de amarelo, branco ou verde", equivale a "colocar uma bola na urna A, B ou V", respectivamente.

Assim, "pintar 2 esferas de amarelo, 3 de branco e 1 esfera de verde" equivale a "colocar 2 bolas na urna A, 3 bolas na urna B e 1 bola na urna V".

É usual resolver este problema de colocar bolas em urnas associando-o ao seguinte problema de dispor bolinhas e barrinhas em fileira.

PROBLEMA 4:
Calcular o número de modos de se dispor 6 bolinhas e 2 barrinhas em fileira, entre 2 barras fixas.

A ilustração mostra a analogia entre os problemas 3 e 4.



Para resolver o problema 4, é preciso não olhar as bolinhas e as barrinhas mas os "espaços entre as bolinhas, ou entre uma barra lateral e uma bolinha". Cada disposição está determinada se sabemos em quais "espaços" colocamos as 2 barrinhas. No nosso caso, o número de "espaços" é 7. Temos então que

(i) o número de disposições em que as duas barrinhas caem em espaços distintos é igual ao número de combinações de 7 objectos (espaços), tomados 2 a 2, o que dá igual a 21,

(ii) o número de disposições em que as duas barrinhas caem no mesmo espaço é igual a 7.

Logo, o número total de disposições é igual a $28 = 21 + 7$.

Resumindo: para resolver um certo tipo de problema combinatório, podemos utilizar o *esquema da equação linear*, conectando-o com uma equação linear de coeficientes unitários, ou o *esquema das urnas*, conectando-o com um problema de colocação de bolas em urnas, ou o *esquema das barras*.

O livro-texto que examinamos sugere que se utilize o esquema da equação linear. Nós afirmamos que na verdade os alunos dispõem de quatro esquemas para resolver um certo tipo de problema combinatório:

(i) o esquema da equação linear (conexão com o problema 2),

(ii) o esquema das urnas (conexão com o problema 3),

(iii) o esquema das barras (conexão com o problema 4),

(iv) o esquema da pintura (conexão com o problema 1).

Do ponto de vista matemático, os quatro problemas são completamente equivalentes, não há nenhuma justificativa matemática para se dar preferência a qualquer um dos esquemas acima. É uma questão de gosto pessoal utilizar um dos esquemas como esquema preferencial.

É plausível portanto esperar que, pelo menos em análise combinatória, o esquema didático tradicional "explanação de teoria matemática seguida de resolução de exercícios" possa ser substituído por um esquema mais construtivista, que é o da conexão de problemas. Neste esquema, seria fundamental a utilização do pensamento analógico.

2. Estratégia de Imersão

A estratégia da conexão vista na seção 1 implicou em procurar problemas equivalentes ao problema dado. Uma outra ideia seria imergir o nosso problema numa família de problemas similares, assim como às vezes imergimos uma dada equação diferencial numa família de equações diferenciais. Uma das maneiras óbvias de fazer isso é produzir problemas conexos por meio da variação dos dados numéricos do problema. A estratégia da imersão está baseada no que George Polya (1978) chama de o "paradoxo do inventor": é possível que seja mais fácil resolver muitos problemas do que um só.

Para ilustrar esta estratégia, vamos considerar novamente o problema da seção 1: de quantos modos se pode pintar 6 esferas iguais, usando apenas três cores diferentes?

Este problema pertence à família de problemas que pode ser resumida no seguinte problema.

PROBLEMA GERAL:
De quantos modos se pode pintar n esferas iguais, usando-se apenas p cores diferentes?

O nosso problema particular é então o problema $(n, p) = (6, 3)$.

Vamos explorar a resolução de problemas mais simples que o nosso; por exemplo, podemos diminuir o número de esferas para 3 e o número de cores para 2. Digamos neste caso que as cores sejam V e A. Temos os seguintes modos de pintar:

VVV (pintamos todas as esferasde V)

VVA (pintamos duas esferas de V e uma de A)

VAA (pintamos uma esfera de V e duas de A)

AAA (pintamos todas as esferas de A)

Há portanto 4 modos de se pintar 3 esferas iguais com 2 cores diferentes.

É fácil generalizar: se temos n esferas iguais e 2 cores diferentes, haverá $n+1$ modos de se pintar.

Consideremos agora o problema em que se utilizam 3 cores diferentes. Digamos que as cores sejam V, A e B.

Um caso simples é $(n, p) = (4, 3)$. Os modos de pintar são os seguintes:

VVVV	VVVA	VVAA	VAAA	AAAA
	VVVB	VVAB	VAAB	AAAB
		VVBB	VABB	AABB
			VBBB	ABBB
				BBBB

Há portanto 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 modos de se pintar 4 esferas iguais com 3 cores diferentes. Nesta soma, 1 representa o número de modos de pintar todas as esferas de V; 2, o número de modos de pintar 3 esferas de V; 3, o número de modos de pintar 2 esferas de V; 4, o número de modos de pintar 1 esfera de V e 5, o número de modos de pintar nenhuma esfera de V.

É fácil generalizar: se temos n esferas e 3 cores diferentes, há

$$1 + 2 + ... + (n + 1) = (n + 1) . (n + 2)/2$$

modos de se pintar.

Nosso problema (n, p) = (6, 3) tem portanto como solução 7.8/2 = 28.

Os casos $p = 2$ e $p = 3$ apresentam padrões interessantes. Vejamos agora o que acontece quando temos 4 cores. Para começar estudemos o caso $(n, p) = (5, 4)$. Digamos que as cores sejam V, A, B, C. A contagem pode ser feita contando-se quantos modos há de pintar 5, 4, 3, 2, 1, 0 esferas de V.

(1) Há 1 modo de pintar as 5 esferas de V.

(2) Pintadas 4 esferas de V, resta 1 esfera e 3 cores. Há portanto 3 modos de pintar 4 esferas de V.

(3) Pintadas 3 esferas de V, restam 2 esferas e 3 cores. Recorrência! Há portanto 6 modos de pintar 3 esferas de V.

(4) Pintadas 2 esferas de V, restam 3 esferas e 3 cores. Recorrência novamente. Há portanto 10 modos de pintar 2 esferas de V.

(5) Pintada 1 esfera de V, restam 4 esferas e 3 cores. Há portanto 15 modos de pintar 1 esfera de V.

(6) Se não pintarmos nenhuma esfera de V, temos 5 esferas e 3 cores. Há portanto 21 modos de pintar nenhuma esfera de V.

Dessa forma, há 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56 modos de se pintar 5 esferas iguais com 4 cores diferentes. Este padrão lembra o triângulo de Pascal!

Vemos que para 5 esferas e 4 cores, temos C (8, 3) = 56 modos de se pintar.

É fácil generalizar: para n esferas e 4 cores, teremos $C(n+3, 3)$.

Generalizando mais ainda: se temos n esferas e p cores diferentes, teremos $C(n + p - 1, p - 1)$ modos de se pintar.

Com a imersão do nosso problema numa família de problemas conexos, pudemos resolver não apenas o problema original mas todos os problemas da família! Além disso, tivemos um "insight", que é a relação do nosso problema com o triângulo de Pascal. Mais ainda, descobrimos como sub-produto uma propriedade da soma parcial dos elementos de uma coluna do triângulo de Pascal.

3. Considerações Finais

Utilizar as estratégias da conexão e da imersão significa adotar uma nova perspectiva epistemológica: a matemática deve ser encarada como uma constante actividade de resolução de problemas, conexão entre problemas e criação de novos problemas; é sobre essa rede de problemas coligados que os conceitos matemáticos se tornam vivos, significativos.

Bibliografia

Bach et al. (1975). *Prelúdio à Análise Combinatória*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.

Polya, George (1978). *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Seiji Hariki
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	$\boxed{56}$	70	56	28	8	1	
...	....									