

A bola zero

José Paulo Viana

Foi a confusão no estúdio da televisão e foi depois a polémica até a Santa Casa da Misericórdia decidir o que fazer perante a situação criada pela inesperada bola. Nos jornais sucederam-se os artigos e as cartas dos leitores, referindo muitas vezes as alterações às probabilidades que a existência de uma bola adicional provocaria.

Penso que vale a pena pensar um pouco nisto e aproveitar para ver o que se passa do ponto de vista probabilístico.

Começemos por ver como funciona o totoloto. Existem 49 bolas numeradas de 1 a 49 e todas as semanas são sorteados 6 números (que constituem a "chave"), mais um 7º número suplementar. Cada aposta simples feita pelos concorrentes consiste na indicação de 6 números. Existem os seguintes prémios:

- 1º – Acertar nos 6 números sorteados.
- 2º – Acertar em 5 números e mais no número suplementar.
- 3º – Acertar em 5 números.
- 4º – Acertar em 4 números.
- 5º – Acertar em 3 números.

Como se vê, o número suplementar só interessa para a atribuição do 2º prémio.

Ignorando a bola suplementar, o número de chaves possíveis corresponde a todas as combinações de 6 números que se podem fazer a partir dos 49 originais:

$$C_6^{49} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = 13\,983\,816$$

Há quase 14 milhões de chaves possíveis. Se quiséssemos ter a

certeza de ganhar o primeiro prémio, teríamos de fazer quase 14 milhões de apostas diferentes!

As probabilidades de acertar no Totoloto

Vamos então calcular as probabilidades de acerto quando se faz apenas uma aposta.

Acertar nos 6 números

De todas as chaves possíveis, só uma corresponde aos 6 números sorteados. Portanto, quando se faz uma aposta, a probabilidade de se ganhar

$$\text{vai ser } P(6) = \frac{1}{13\,983\,816}$$

Acertar em 5 números

Temos de ver quantas chaves existem com 5 números certos. Se representarmos por C um número certo e por E um errado, a estrutura da chave com 5 acertos vai ser: CCCCCE.

Existem 6 números certos para preencher as 5 casas C, logo há $C_5^6 = 6$ possibilidades.

Existem 43 números errados para preencher as casas E, logo há 43 possibilidades (ou C_1^{43})

No total há $6 \times 43 = 258$ chaves com 5 resultados certos.

$$P(5) = \frac{258}{13\,983\,816} \approx \frac{1}{54\,201}$$

Acertar em 4 números

A estrutura da chave é CCCCEE

Há 6 números certos para preencher as 4 casas C: $C_4^6 = 15$

Há 43 números errados para as 2 casas E: $C_2^{43} = 903$

Quem assistiu à cena nunca mais se esquecerá da cara espantada e atrapalhada do apresentador do Totoloto quando, no concurso do dia 6 de Janeiro de 1996, saiu a bola com o número zero.

No total há $15 \times 903 = 13\ 545$ chaves com 4 resultados certos.

$$P(4) = \frac{13\ 545}{13\ 983\ 816} \approx \frac{1}{1\ 032}$$

Acertar em 3 números

Estrutura: CCCEEE

Casos favoráveis:

$$C_3^6 \times C_3^{43} = 20 \times 12\ 341 = 246\ 820$$

$$P(3) = \frac{246\ 820}{13\ 983\ 816} \approx \frac{1}{57}$$

Acertar em 2 números

Estrutura: CCEEEE

Casos favoráveis:

$$C_2^6 \times C_4^{43} = 15 \times 123\ 410 = 1\ 851\ 150$$

$$P(2) = \frac{1\ 851\ 150}{13\ 983\ 816} \approx \frac{1}{7,55} \approx 0,132$$

Acertar em 1 número

Estrutura: CEEEEE

Casos favoráveis:

$$C_1^6 \times C_5^{43} = 6 \times 962\ 598 = 5\ 775\ 588$$

$$P(1) = \frac{5\ 775\ 588}{13\ 983\ 816} \approx 0,413$$

Acertar em 0 números

Estrutura: EEEEE

Casos favoráveis: $C_6^{43} = 6\ 096\ 454$

$$P(0) = \frac{6\ 096\ 454}{13\ 983\ 816} \approx 0,436$$

Nota:

Observando o trabalho feito, vê-se que existe uma fórmula que nos dá directamente a probabilidade de acertar em x números:

$$P(x) = \frac{C_x^6 \times C_{6-x}^{43}}{C_6^{49}}$$

Acertar em 5 números e no suplementar

Representando por S o número suplementar, a estrutura da chave nestas condições é SCCCC.

Casos favoráveis: $1 \times C_5^6 = 1 \times 6 = 6$

$$P(5+S) = \frac{6}{13\ 983\ 816} = \frac{1}{2\ 330\ 636}$$

E se forem 50 bolas?

É evidente que se, em vez de 49, as bolas forem 50 as probabilidades se alteram. Para as calcular podemos repetir o raciocínio que fizemos para as 49 ou então adaptar a fórmula para a nova situação:

$$P(x) = \frac{C_x^6 \times C_{6-x}^{44}}{C_6^{50}}$$

Obtemos assim os seguintes valores:

$$P(6) = \frac{1}{15\ 890\ 700}$$

$$P(5) \approx \frac{1}{60\ 192}$$

$$P(4) \approx \frac{1}{1120}$$

$$P(3) \approx \frac{1}{60} \text{ ou } 1,67\%$$

$$P(2) \approx \frac{1}{7,8} \text{ ou } 12,8\%$$

$$P(1) \approx 0,410$$

$$P(0) \approx 0,444$$

$$P(5+S) = \frac{6}{15\ 890\ 700} = \frac{1}{2\ 648\ 450}$$

Tal como se esperava, todas as probabilidades de acertar diminuem com a existência da bola 0, com

excepção da probabilidade de acertar em zero números, que aumenta. Com 50 bolas seria portanto mais difícil ganhar um prémio.

O que se mantém e o que muda com a bola 0

A polémica, que surgiu quando no sorteio apareceu a bola 0, desenvolveu-se a três níveis.

1º O sorteio tem de ser feito com 49 bolas

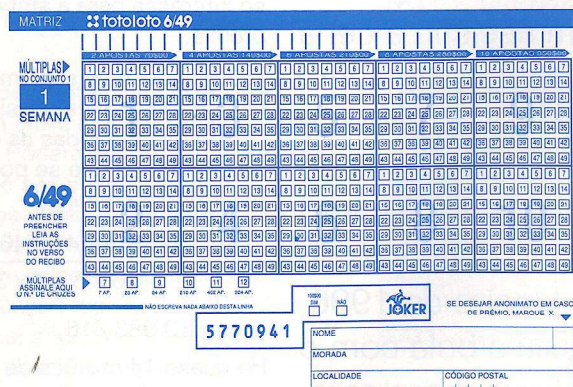
Aqui estamos todos de acordo. Não há dúvida que a bola 0 nunca poderia estar dentro da máquina. As bolas deveriam ter sido conferidas antes de se iniciar o sorteio e não o foram. Alguém inadvertidamente (ou então com enorme sentido de humor e sem medo das consequências...) colocou lá a bola extra.

2º As probabilidades alteram-se por haver 50 em vez de 49 bolas.

É evidente que sim, já fizemos os cálculos que o mostram. Mas então que se deve fazer quando sai a bola 0 que não deveria lá estar? A atitude que o júri tomou foi anular (ou ignorar) a bola 0 e extrair nova bola. Fazendo isto, o número de chaves possíveis voltou a ser de 13 983 816 e as probabilidades de acertar em 6, 5, 4 ou 3 números não se alteraram.

Em rigor, poderia haver na máquina um número qualquer de bolas. Desde que estejam lá todas as bolas 1 a 49 (sem nenhum número repetido), o que há a fazer é: sempre que sair uma bola numerada fora deste intervalo

(continua na página 28)



o local onde ele fosse prosseguir os seus estudos;

- uma das vantagens do dossier qualitativo é eliminar de uma vez por todas as classificações numéricas; as diferenças importantes entre os jovens são de natureza qualitativa e não quantitativa — são as suas tendências, os seus gostos, as suas inclinações e interesses, os tipos de trabalho e actividades que tem desenvolvido com maior êxito e interesse, que constituem a melhor fonte de informação para a escola onde o aluno vai prosseguir os seus estudos; o ponto de partida do trabalho da escola e dos professores deve ser o conhecimento qualitativo dos alunos, pois é a escola que tem de procurar corresponder às características dos seus alunos e não os alunos que têm de se uniformizar perante as idiossincrasias da escola e dos professores;

- o fim dos exames e dos testes corresponde a levar até ao fim as tendências inovadoras da moderna pedagogia; os exames constituem um processo de avaliação completamente inadequado para compreender e apreciar a evolução dos alunos em muitos aspectos hoje considerados relevantes — as qualidades de trabalho em grupo, as capacidades de comunicação escrita e oral, de argumentação, de persistência perante as dificuldades, de imaginação, de criatividade. Quanto à avaliação de conhecimentos, os exames apenas a podem fazer de modo estereotipado, uniforme — e isto é contrário à ideia de que os alunos constroem o seu próprio conhecimento, que o fazem em ritmos diferentes e muitas vezes explicitando esse conhecimento de maneira pessoal, diferenciada, original.

Tudo isto é controverso, eu sei. Mas

era o que devíamos andar a discutir, e não se os exames finais devem valer 60 ou 70%. A escola, como disse um dia Ubiratan D'Ambrósio aos alunos da Faculdade de Ciências, destina-se a educar, e não a classificar, a scriar. É natural a sociedade pedir isso à escola, e é natural também que o ensino superior faça o mesmo em relação à escola secundária. Isso facilita o trabalho dos empregadores e dos reitores. Não têm que pensar, é como a escolha das maçãs na CEE — entram as que têm um certo calibre, ficam de fora as de calibre inferior. Mas nós devemos recusar-nos a ser uma máquina de calibrar, somos capazes de fazer melhor do que isso.

Mas quereremos?

Eduardo Veloso

¹Estou a escrever em 24 de Fevereiro de 1996

Bola Zero

(Continuação da página 26)

não a consideramos e extraímos nova bola para a substituir. Desta forma, todos os jogadores estão em igualdade de circunstâncias e as probabilidades de prémio não se modificam.

3º O facto de haver uma bola extra, mesmo que ela não saia, altera o resultado final da extracção

É claro que, havendo na máquina uma bola indevida, ela choca com as outras, altera-lhes as posições e faz com que as bolas extraídas não sejam as mesmas. Mas é justamente isto que faz com que a extracção seja um fenómeno aleatório. Qualquer alteração, por mais pequena que seja, das condições iniciais ou intermédias vai provocar um resultado diferente. Como as bolas vão dar milhares de choques entre si enquanto a máquina roda, basta que um dos choques não se faça nas mesmas condições para que os choques seguintes se alterem

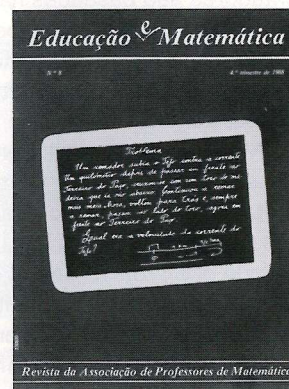
cada vez mais, fazendo com que o resultado final seja imprevisível.

Quando as bolas são colocadas na máquina, basta uma imperceptível rotação numa delas para que o resultado seja diferente. Quando se fecha a tampa, as bolas abanam ligeiramente e o resultado da extracção altera-se. As vibrações provocadas pelos passos do apresentador na sala ou por um automóvel que passa na rua enquanto a máquina gira vão provocar minúsculas alterações nos choques das bolas, essas alterações vão sendo amplificadas e dois segundos depois as posições relativas das bolas já são muito diferentes. As pequenas flutuações de energia eléctrica fazem com que a máquina não rode sempre da mesma maneira e o os números saídos alteram-se...

Ora não parece lógico reclamar que a chave do Totoloto foi diferente porque

o apresentador andou na sala durante o sorteio, porque passou um automóvel na rua ou porque a EDP não forneceu energia eléctrica absolutamente constante enquanto a máquina girava.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira - Lisboa



Capa do n° 8 da Educação e Matemática