# A conquista do castelo e suas implicações matemáticas

**Susana Carreira,** Escola Secundária de Mem Martins

«A Conquista do Castelo» é um programa de simulação que oferece também características de jogo. Na sua raíz está a simulação de um fenómeno físico bem conhecido: o lançamento de projécteis segundo determinadas direcções. Só por si, este facto evidencia uma estreita ligação à Física e, em particular, ao estudo de um certo tipo de movimentos. Mas, para além disso, o programa permitirá contactar com um razoável conjunto de modelos e conceitos matemáticos.

Em traços gerais, «A Conquista do Castelo» apresenta duas etapas distintas. Na primeira etapa, designada por «Assalto ao Castelo», é simulado um ataque à torre de um Castelo. No ecrã, surge um archeiro que terá de lançar flechas, de modo a atingir 3 alvos, escolhidos aleatoriamente em cada execução e materializados nas vigias da torre. O utilizador, poderá efectuar um lançamento (um tiro de arco) visando cada um dos alvos. Para isso, terá de introduzir dois valores: o ângulo de inclinação do projéctil (ângulo que a flecha faz com a horizontal) e a velocidade imprimida. Após a introdução destes dados, pode observar-se, num sistema cartesiano, a trajectória descrita pelo projéctil.

A segunda etapa consiste na «Defesa do Castelo». Nas ameias da torre encontra-se uma sentinela que terá de lançar pedras, segundo a horizontal, por forma a atingir os invasores que, em baixo, procuram chegar à porta do Castelo. A posição do invasor vai variando, nos 3 sucessivos lançamentos de pedras. Ao utilizador pede-se apenas que introduza a velocidade a imprimir ao projéctil. Em seguida, ser-lhe-á apresentado o gráfico da trajectória da pedra.

O carácter de jogo resulta, fundamentalmente da existência de uma pontuação que premeia o jogador, sempre que este acerta num alvo.

«A Conquista do Castelo», sendo uma situação imaginária, até mesmo, do domínio da fantasia, (já houve alguém que viu nela as célebres contendas entre o Robin dos Bosques e o Xerife de Nottingham) parece ter um forte sentido lúdico, o que pode ser um factor de motivação. Além disso, julgo que o programa permite levantar questões importantes, das quais dependerá, sem dúvida, o êxito da sua exploração didáctica em aulas ou em outro tipo de actividades.

«A Conquista do Castelo» estará especialmente vocacionada para o estudo de funções, nomeadamente, o da função quadrática, no 11.º ano.

Há toda uma série de conceitos que, poderão ser captados, a partir da sua utilização.

Por exemplo, as equações paramétricas e cartesianas de uma curva, a restrição e o prolongamento de uma função, a injectividade, a interpretação e visualização do máximo, a determinação de zeros, as relações de simetria, a concavidade, os limites, a existência de funções de uma e mais variáveis, bem como, a multiplicidade de soluções para um mesmo problema.

Os gráficos das trajectórias dos projécteis são construídos, a nível de programação, recorrendo às equações físicas do movimento. Surge assim, uma variável de extrema importância: o tempo. De facto, cada posição do projéctil corresponde a um instante bem determinado. Atribuindo à variável t valores sucessivos e suficientemente próximos, torna-se possível localizar num sistema de eixos, as posições correspondentes (x, y) da flecha do archeiro ou da pedra da sentinela.

O modo segundo o qual a abcissa e a ordenada dependem do tempo, também não é difícil de calcular, atendendo às leis da Cinemática, e tem-se então:

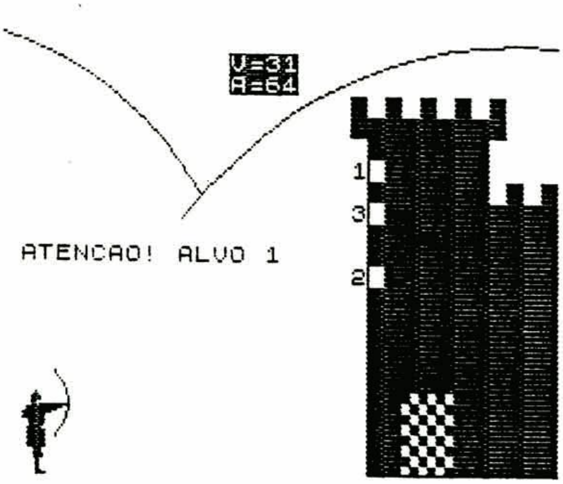
— No lançamento da flecha, com um ângulo de inclinação A e uma velocidade inicial Vo:

$$\begin{cases} x = V_0 . \cos A . t \\ y = V_0 . \operatorname{sen} A . t - 1/2 \, gt^2 \end{cases}$$

— No lançamento da pedra, segundo a horizontal, com uma velocidade inicial Vo:

$$\begin{cases} x = - V_0 . t \\ y = - 1/2 \, gt^2 \end{cases}$$

Será curioso descobrir que a flecha lançada pelo archeiro descreve uma curva e, mais ainda, que esta curva é sempre do mesmo tipo, qualquer que seja a incli-



nação ou a velocidade inicial do lançamento. Algo de semelhante sucede com a pedra lançada das ameias da torre; a trajectória que esta descreve é sempre do mesmo tipo, independentemente da velocidade inicial.

Mais espectacular, porém, será a conclusão de que as curvas descritas pela flecha e pela pedra são da mesma família. Tal resultado poderá surgir com a passagem às equações cartesianas das curvas, ou por outras palavras, «congelando o movimento», o que significa eliminar o parâmetro t.

*Surgem, então, as seguintes expressões:*

$$y = -\frac{g}{2\,V_0^2 .\ \cos^2 A}\,x^2 + \operatorname{tg} A .\ x$$

para a trajectória da flecha e

$$y = -\frac{g}{2\,V_0^2}\,x^2$$

para a trajectória da pedra.

Deparamos, afinal, com funções quadráticas cujo gráfico é uma parábola e, como tal, pertencentes à mesma família.

A partir deste ponto, será interessante reconhecer que a trajectória de cada flecha corresponde à restrição de uma função quadrática a um dado intervalo, o mesmo acontecendo à trajectória de cada pedra lançada da torre.

Então, ao invés de dar valores e esperar para ver a trajectória no ecrã pode pensar-se numa função particular, de qualquer dos dois tipos, para tentar descobrir os valores do ângulo e/ou da velocidade inicial que lhe correspondem. Assím, por exemplo, à função:

$$f(x) = -\frac{1}{40}\,x^2 + x$$

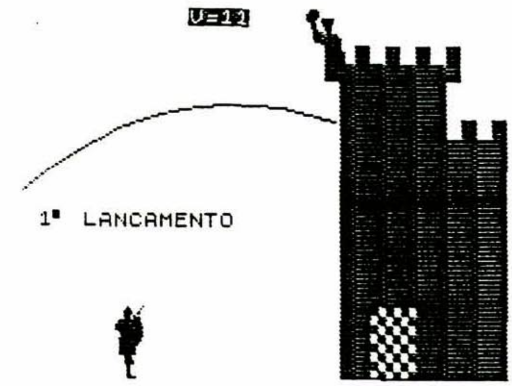
estão associados um ângulo de 45° e uma velocidade de 19.8 m/s. Se o gráfico desta função tiver sido esboçado previamente, ele poderá ser confirmado no computador, introduzindo estes dados.

Outro aspecto que poderá ser digno de atenção, tem a ver com a descoberta e determinação dos zeros destas funções. Se tomarmos para origem do referencial a posição inicial da flecha e desprezarmos a altura do archeiro, poderemos constatar a existência de dois pontos do gráfico, cuja ordenada é zero: o ponto de lançamento da flecha e o ponto em que esta atinge de novo o solo. Este segundo ponto tem, inclusivamente, um significado especial uma vez que corresponde à distância máxima atingida pela flecha, segundo a horizontal, também designada por alcance. Ao determinarmos os zeros da função quadrática, obtemos:

$$x - 0 \text{ ou } x = \frac{V_0^2 \text{ sen } 2A}{g},$$

conseguindo, assim, a expressão que nos dá o alcance da flecha.

No caso do lançamento da pedra, e tomando para origem do referencial a posição de arremesso, é fácil verificar que existe um único zero, ou seja, o ponto (0,0). Partir daqui para a generalização do número de zeros de uma função quadrática é um curto passo.




Vejamos ainda, como se poderá entender o máximo de qualquer destas funções, à luz do fenómeno real que elas traduzem. No caso da parábola que tem como restrição o lançamento da pedra, o máximo situa-se no ponto (0,0). É neste ponto que a 1.ª derivada se anula e muda de sinal. Mas podemos olhá-lo também como um ponto de viragem. Para isso, basta supor que a sentinela lança a pedra para o lado oposto da torre, o que implicará uma velocidade inicial negativa. Eis assim, um paralelismo entre o sinal da derivada e o sentido do movimento. Tal paralelismo mantém-se no lançamento da flecha. O máximo corresponde ao ponto em que a 1.ª derivada se anula e muda de sinal.

Contudo, este ponto é também aquele em que o movimento passa de ascendente a descendente.

Seria, por certo, possível encontrar várias outras aplicações do programa ao estudo das funções quadráticas; basta pensar na monotonia, observando a variação de altitude do projéctil, na concavidade, etc.

No entanto, e um pouco em jeito de desafio, não posso deixar de mencionar aquilo a que chamei «Limites para a Imaginação».

De facto, parece-me evidente que os programas de simulação possuem potencialidades que conduzem a um tipo de aprendizagem muito mais centrada no aluno, despertando nele a atitude de colocar a questão «o que é que aconteceria se...». Segundo esta perspectiva, será interessante ver o que acontece quando o archeiro, ao lançar as suas flechas, faz variar o ângulo de lançamento até aos limites 0° e 90°. Veremos, sem dúvida, as trajectórias aproximarem-se, respectivamente, da horizontal e da vertical.

De modo análogo, nada nos impede de imaginar a sentinela, lançando pedras do alto da torre com uma velocidade tão grande quanto se queira. E, de facto, poder-se-á visualizar uma trajectória que se aproxima inifinitamente da horizontal. Mas, poderemos também supor que a sentinela deixa simplesmente cair a pedra do alto da torre, sem lhe imprimir qualquer impulso horizontal. Neste caso, estaremos perante um movimento de queda livre e a trajectória será vertical, conforme poderemos verificar no computador.

Ficam, assim, apresentadas, algumas das implicações matemáticas de «A Conquista do Castelo». Espero que outros conquistadores possam vir a alcançar novos e insuspeitados Castelos.