rança e prova que o resultado está correcto. Nicolás vai mais longe. generalizando o problema para quando cada filho tira a n-ésima parte, dizendo que $n-1$ é o número de filhos e $(n-1)^2 \times 1000$ o valor total da herança.

Embora a solução esteja correcta, nada nos indica sobre o processo como chega a esta resolução, o que aliás é uma característica muito pouco pedagógica da sua Aritmética, mas também aliciante porque nos desafia a tentar compreender o "seu" pensamento.

Maria João Lagarto segue uma via diferente de resolução do problema, partindo do que receberam os dois últimos filhos.

Quando o último filho tira x contos não sobra dinheiro. Como todos os filhos recebem a mesma quantia, o penúltimo recebe tanto como o último e tira $x-1000$ mais a sétima parte do restante, y. Assim, utilizando a álgebra, o que seria impossível na época de Nicolás, vem:

$$x-1000+\frac{1}{7}y=x$$

Donde $y=7000$. Como o penúltimo filho retira a estes 7000 contos a sua sétima parte, ou seja, 1000, sobram 6000 para o último. Por outro lado, como cada filho começa por tirar mais 1000 contos que o anterior, tendo o primeiro tirado 1000 e o último 6000, são ao todo 6 filhos e o total da herança é de 36000 contos.

Referências

Nicolás, Gaspar. Tratado da prática Darismética. Edição fac-similada, Livraria Civilização-Editora, Porto, 1963.

Smith, David Eugene. History of Mathematics, vol. II, Dover Publications, Inc. New York, 1958.

La Recherche nº 278, Julho/Agosto 1995. "Quelques divertissements numériques", David Singmaster. Paris.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Lisboa)
Maria João Lagarto
Esc. Sec. Monte da Caparica

O problema do ProfMat 95

José Paulo Viana

Como habitualmente, realizou-se um concurso de resolução de problemas entre os participantes do ProfMat de Évora. Foi proposto "Um Torneio de Xadrez", adaptado de um problema publicado em "Challenging Math Teasers" de J. A. H. Hunter, Edições Dover, Nova York, 1980:

No xadrez, a vitória vale 1 ponto, o empate meio ponto e a derrota 0.

No torneio da minha escola inscreveram-se várias raparigas mas só dois rapazes, o Pedro e o Paulo. Cada jogador teve de fazer um jogo com cada um dos outros concorrentes. No final encontrei o Pedro.

– Então, que tal correu?

– Mal. Eu e o Paulo, juntos, só fizemos 9 pontos.

– E a classificação?

– Uma vergonha... Ficámos nos dois últimos lugares. Ainda por cima, por coincidência, as raparigas ficaram todas em primeiro lugar com o mesmo número de pontos.

– Quantas raparigas se increveram?

– Não lhe digo. Veja lá se descobre.

E o leitor, consegue descobrir quantas raparigas entraram no torneio?

Houve 36 respostas individuais e 6 colectivas, todas correctas.

Uma possível resolução do problema é a que se segue.

Seja N o número de raparigas inscritas. O número total de jogadores é $N+2$. O número de jogos é dado por

$$C_2^{N+2}=\frac{(N+2).(N+1)}{2}$$

Seja K a pontuação obtida por cada rapariga. Note-se que K é um múltiplo de 0,5 e que é de certeza maior que 4,5 (para as raparigas ficarem à frente dos dois rapazes).

A pontuação obtida por todas as raparigas é KN.

O total de pontos de todos os concorrentes é $KN+9$.

O total de pontos no final do torneio é igual ao número de jogos disputados, porque em cada jogo é atribuído um ponto (que vai para o vencedor ou é repartido pelos dois jogadores em caso de empate). Então:

$$\frac{(N+2).(N+1)}{2}=KN+9$$

Desembaraçando de parêntesis e denominadores:

$N^2+3N+2=2KN+18$ ou

$N^2+3N=2KN+16$

Não é fácil descobrir as soluções inteiras desta equação em N, mas com um pequeno truque tudo se simplifica, evitando fazer inúmeras tentativas e garantindo a unicidade da solução. Basta dividir todos os termos por N.

$$N+3=2K+\frac{16}{N}$$

Nesta equação $N+3$ é um número inteiro, $2K$ é inteiro de certeza porque K é múltiplo de 0,5, logo $\frac{16}{N}$ também tem de ser inteiro. Então N só pode ser 1, 2, 4, 8 ou 16.

Calculamos agora os correspondentes valores de K.

Mas K tem de ser maior que 4,5. Logo só há uma solução que serve para o problema: $N=16$ e $K=9$.

Concorreram 16 raparigas e cada uma delas teve 9 pontos.

Participantes

Individuais:

Alberto Canelas, Alberto M. Teixeira, Ana Mafalda Pereira, Ana Cristina Martins, Ana Cristina Assis, António Abrantes, António Roque, Assunção Oliveira, Cristina Gonçalves, Cristina Brito, Fátima Gordo, Fausto da Silva, Fernanda Oliveira, Isabel Brandão, Isabel Duarte Paula, Isabel Rocha, Isabel Vale, J. Orlando Freitas, Jacinto Salgueiro, José Matos, Leonor Vieira, Luis M. Ferreira, Manuel Hipólito, Miguel Castro, Olívia Sousa, Palmira Mariz, Paulo Dias, Paulo Saraiva, Pedro Esteves, Pedro Girão, Raul Gonçalves, Rita Pedroso, Roberto Oliveira, Rui Caldeira, Sérgio Valente, Sofia Chita, Sónia Portela

Colectivos:

Alzira Santos e Graça Castanheira
António da Mata e Patrícia Metello
Cristina Rodrigues e Teodora Lemos
João Nunes, Mª João Dias, Mª João Lagarto e Paula Nunes
João Rino, Rosa Jacobetty e Rui Gomes
Manuel António Pinheiro & Cª

Comentários

O júri privilegiou as resoluções que evitaram a procura da solução unicamente por tentativas e que garantiram a sua unicidade. Gostaríamos de transcrever os comentários finais de Fernanda Oliveira depois de apresentar uma resolução muito parecida com a publicada aqui e que mostram bem como muitas vezes é feita a investigação matemática e a resolução de problemas.

> Não, não foi assim tão fácil a minha resolução! Primeiro parti da equação
>
> $$\frac{(N+2).(N+1)}{2} = KN + 9$$
>
> e substituí valores de K a partir de 5 até obter um N inteiro. Deu-me, é claro, N=16 e K=9. Mas como provar que esta solução era única? Ainda pensei na folha de cálculo, mas mesmo isso não me resolvia o problema se a escola fosse do tipo "Hotel do Infinito" e a sua população fosse superior ao maior N que a capacidade da folha de cálculo permitisse. Só depois de várias "voltas" à equação é que encontrei a forma
>
> $$N + 3 = 2K + \frac{16}{N}$$
>
> que me teria poupado todo este trabalho (o que era importante, já que isto do ProfMat é muito desgastante!).
>
> Se fosse um pouco mais "iluminada" e tivesse trabalhado com esta equação desde início apenas teria que experimentar os divisores de 16. Fácil, não é?

Manuel Pinheiro, João Rino, Rosa Jacobetty e Rui Gomes fazem uma confirmação concreta da solução, apresentando um quadro dos resultados de todos os jogos do torneio.

N	1	2	4	8	16
K	-6	-1,5	1,5	4,5	9

A Ana Cristina Assis dá resposta na forma de um jornal de oito páginas com uma reportagem completa do torneio: local da realização, lista de concorrente, resultados dos jogos de cada concorrentes, classificação final e considerações sobre a coincidência das classificações femininas e sobre a superioridade manifestada pelas raparigas!

O Luis Miguel Ferreira e o Jacinto Salgueiro propõem a generalização do problema:

*Os dois rapazes que participaram no torneio ficaram em último com um total de **n** pontos e as raparigas ficaram todas em primeiro. Quantas raparigas se inscreveram?*

Os leitores poderão tentar resolver este novo problema e concluirão que o número de raparigas é $2(n-1)$, tendo cada uma obtido n pontos.

O Jacinto Salgueiro vai mais longe:

Como será se forem R rapazes em último lugar com o total de n pontos?

E indica a solução: o número de raparigas é $2n - R^2 + R$.

José Paulo Viana
Esc. Sec. de Carnide

Prémios

A Texas Instruments oferece os prémios do problema do ProfMat 95, que são os seguintes:

1º Luís Miguel Ferreira
Viewscreen OH 9700 GE

2º Jacinto Jaime Salgueiro
Viewscreen OH 7700 GE

3º Fernanda Oliveira
Calculadora gráfica CFX9800G

Para receberem os prémios, deverão contactar com a APM.