O problema do trimestre

Sobre o problema anterior

Na última edição de *Educação e Matemática* propusemos **A Herança do Velho Senhor**, um antigo problema de origem desconhecida e que aparece citado num manuscrito de Nicolas Chuquet, em 1484.

Um velho homem, prestes a morrer, mandou chamar os filhos para se despedir deles e distribuir o dinheiro que guardava num cofre. No entanto o homem estava tão mal que já não se lembrava do valor da sua fortuna nem sequer de quantos filhos tinha.

Apesar disso, pediu ao filho mais velho para tirar 1000 contos mais a sétima parte do que sobrasse. Depois, disse ao segundo filho para tirar 2000 contos mais a sétima parte do que ainda houvesse. A seguir, o terceiro filho recebeu 3000 contos mais a sétima parte do restante. E assim sucessivamente.

Quando os filhos compararam o que tinham recebido, verificaram que todos tinham recebido o mesmo.

Quantos filhos tinha o homem e quanto recebeu cada um?

Tivemos sete respostas: Cristina Vilhena (Porto), Helena Rocha (Lisboa), Judite Barros (Lisboa), Manuela Ribeiro (Mem Martins), Maria João Lagarto (Caparica), Orlando Freitas (Funchal) e Roberto Oliveira (Funchal).

Quase todas as resoluções seguiram a mesma via:

Seja X o valor total da herança.

O 1º filho herda

$$F_1 = 1000 + \frac{1}{7}(X - 1000)$$

O 2º filho herda

$$F_2 = 2000 + \frac{1}{7}(X - F_1 - 2000)$$

Como $F_1 = F_2$ vem, resolvendo esta equação em ordem a X, que a herança era de 36000 contos. Portanto o velho senhor tinha 6 filhos e cada um recebeu 6000 contos.

O curioso disto tudo é que, partindo apenas da igualdade entre o recebido pelos dois filhos mais velhos, os outros acabem por receber exactamente a mesma quantia, como os leitores poderão facilmente confirmar. Helena Rocha até comenta: *Incrível!*.

Maria João Lagarto começou por fazer um pouco de história:

Problemas sobre testamentos são tão antigos que a sua origem se perde no tempo. Segundo Smith (1958), estes problemas estão intimamente ligados à lei romana, *Lex Falcidia* do ano 400 a.C., envolvendo heranças e tinham portanto uma forte ligação à realidade da época. Na Idade Média, estes problemas sofreram um desenvolvimento e uma extensão consideráveis, desligando-se da vida diária e tornando-se mesmo, por vezes, absurdos. No entanto, eram muito populares e apareciam em quase todas as aritméticas publicadas.

É exactamente com esta formulação que este problema aparece no *Tratado da Prática Darismética*, a primeira aritmética publicada em Portugal, em 1519.

A resolução que apresento é baseada na do autor deste livro. Gaspar Nicolás começa por calcular o número de filhos, dizendo que "como estou a tirar a sétima parte, faço 7−1=6 e 6 é o número de filhos". Calcula depois o valor total da he

Problema proposto

INSPECÇÃO ÀS ESTAÇÕES

No deserto de Gobi existem onze estações científicas automáticas colocadas em linha recta e ligadas entre si por uma pista de terra batida. A distância entre duas estações consecutivas é de um quilómetro.

Uma vez por ano é feita inspecção às estações para ver se está tudo em ordem. Para isso, no primeiro dia, um helicóptero coloca um técnico e um veículo especial de transporte no deserto numa das estações. O técnico todos os dias inspecciona uma das estações e muda-se para outra. Quando terminar a inspecção de todas as estações, manda uma mensagem rádio a dizer onde se encontra e o helicóptero vai buscá-lo.

O técnico recebe um subsídio especial de 10 contos por cada quilómetro que tiver percorrido no deserto ao deslocar-se de uma estação para outra (sem mudar de direcção). Por isso não lhe interessa fazer as estações todas seguidas.

Por que ordem deve inspeccionar as estações para obter o subsídio máximo?

Quanto vale este subsídio máximo?

rança e prova que o resultado está correcto. Nicolás vai mais longe. generalizando o problema para quando cada filho tira a n-ésima parte, dizendo que $n-1$ é o número de filhos e $(n-1)^2 \times 1000$ o valor total da herança.

Embora a solução esteja correcta, nada nos indica sobre o processo como chega a esta resolução, o que aliás é uma característica muito pouco pedagógica da sua Aritmética, mas também aliciante porque nos desafia a tentar compreender o "seu" pensamento.

Maria João Lagarto segue uma via diferente de resolução do problema, partindo do que receberam os dois últimos filhos.

Quando o último filho tira x contos não sobra dinheiro. Como todos os filhos recebem a mesma quantia, o penúltimo recebe tanto como o último e tira $x-1000$ mais a sétima parte do restante, y. Assim, utilizando a álgebra, o que seria impossível na época de Nicolás, vem:

$$x-1000+\frac{1}{7}y=x$$

Donde y=7000. Como o penúltimo filho retira a estes 7000 contos a sua sétima parte, ou seja, 1000, sobram 6000 para o último. Por outro lado, como cada filho começa por tirar mais 1000 contos que o anterior, tendo o primeiro tirado 1000 e o último 6000, são ao todo 6 filhos e o total da herança é de 36000 contos.

Referências

Nicolás, Gaspar. Tratado da prática Darismética. Edição fac-similada, Livraria Civilização-Editora, Porto, 1963.

Smith, David Eugene. History of Mathematics, vol. II, Dover Publications, Inc. New York, 1958.

La Recherche nº 278, Julho/Agosto 1995. "Quelques divertissements numériques", David Singmaster. Paris.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Lisboa)
Maria João Lagarto
Esc. Sec. Monte da Caparica

O problema do ProfMat 95

José Paulo Viana

Como habitualmente, realizou-se um concurso de resolução de problemas entre os participantes do ProfMat de Évora. Foi proposto "Um Torneio de Xadrez", adaptado de um problema publicado em "Challenging Math Teasers" de J. A. H. Hunter, Edições Dover, Nova York, 1980:

No xadrez, a vitória vale 1 ponto, o empate meio ponto e a derrota 0.

No torneio da minha escola inscreveram-se várias raparigas mas só dois rapazes, o Pedro e o Paulo. Cada jogador teve de fazer um jogo com cada um dos outros concorrentes. No final encontrei o Pedro.

– Então, que tal correu?

– Mal. Eu e o Paulo, juntos, só fizemos 9 pontos.

– E a classificação?

– Uma vergonha... Ficámos nos dois últimos lugares. Ainda por cima, por coincidência, as raparigas ficaram todas em primeiro lugar com o mesmo número de pontos.

– Quantas raparigas se increveram?

– Não lhe digo. Veja lá se descobre.

E o leitor, consegue descobrir quantas raparigas entraram no torneio?

Houve 36 respostas individuais e 6 colectivas, todas correctas.

Uma possível resolução do problema é a que se segue.

Seja N o número de raparigas inscritas. O número total de jogadores é $N+2$. O número de jogos é dado por

$$C_2^{N+2}=\frac{(N+2).(N+1)}{2}$$

Seja K a pontuação obtida por cada rapariga. Note-se que K é um múltiplo de 0,5 e que é de certeza maior que 4,5 (para as raparigas ficarem à frente dos dois rapazes).

A pontuação obtida por todas as raparigas é KN.

O total de pontos de todos os concorrentes é $KN+9$.

O total de pontos no final do torneio é igual ao número de jogos disputados, porque em cada jogo é atribuído um ponto (que vai para o vencedor ou é repartido pelos dois jogadores em caso de empate). Então:

$$\frac{(N+2).(N+1)}{2}=KN+9$$

Desembaraçando de parêntesis e denominadores:

$N^2+3N+2=2KN+18$ ou

$N^2+3N=2KN+16$

Não é fácil descobrir as soluções inteiras desta equação em N, mas com um pequeno truque tudo se simplifica, evitando fazer inúmeras tentativas e garantindo a unicidade da solução. Basta dividir todos os termos por N.

$$N+3=2K+\frac{16}{N}$$

Nesta equação $N+3$ é um número inteiro, $2K$ é inteiro de certeza porque K é múltiplo de 0,5, logo $\frac{16}{N}$ também tem de ser inteiro. Então N só pode ser 1, 2, 4, 8 ou 16.

Calculamos agora os correspondentes valores de K.

Mas K tem de ser maior que 4,5. Logo só há uma solução que serve para o problema: N=16 e K=9.

Concorreram 16 raparigas e cada uma delas teve 9 pontos.