

# As progressões geométricas no cálculo financeiro

Roberto Oliveira

Com a imensa publicidade que se faz hoje em dia ao crédito ao consumo, a que de certeza os estudantes não serão alheios, não devemos deixar passar em claro a importância das progressões, também no cálculo financeiro. Este artigo refere apenas algumas situações reais que nos podem levar a fazer diversos trabalhos com os alunos.

## Exemplo1: Depósitos a prazo

Depositando uma quantia  $D$ , quanto é que se terá daqui a  $n$  períodos? (em muitos bancos, o período é diário ou mensal). Seja  $A_n$  o saldo após  $n$  períodos (suponha-se anos) e  $T$  a taxa de juros composta nesse período (isto é, juros capitalizáveis). Então:

$$\begin{aligned} A_1 &= D + DT = D(1+T) \\ A_2 &= A_1 + A_1T = D(1+T) + [D(1+T)]T = D(1+T)^2 \\ A_3 &= A_2 + A_2T = \dots = D(1+T)^3 \\ &\dots \\ A_n &= D(1+T)^n \\ \therefore A_n &= \underbrace{D + DT + DT(1+T) + DT(1+T)^2 + \dots + DT(1+T)^{n-1}}_{\text{Soma de } n \text{ termos consecutivos de uma PG de razão } 1+T} \end{aligned}$$

### Curiosidade 1. A senhora

Gaudência deposita 500 contos a prazo à taxa anual nominal de 10%. Que quantia terá daqui a um ano?

Pelas contas da senhora Gaudência,  $A_1 = 500(1+0,1)^1 = 550$  contos.

No entanto, a taxa nominal é a taxa composta mensalmente,  $\therefore T = \frac{10}{12}\%$

e, assim,  $A_1 = 500\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)$ , quantia

após o 1º mês,  $A_2 = A_1\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)$ ,

quantia após o 2º mês, etc., e

finalmente  $A_{12} = A_{11}\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)$ , quantia

após o 12º mês, isto é,

$$A_{12} = 500\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} \approx 552,357\$00$$

Portanto, é (um pouco) melhor quando os juros são compostos mensalmente. E se fossem compostos diariamente? Teríamos:

$$A_{365} = 500\left(1 + \frac{0,1}{365}\right)^{365} \approx 552,579\$00$$

Claro que estes períodos pequenos só interessam para quantias elevadas que sejam depositadas. De qualquer maneira, para períodos cada vez mais pequenos, iremos ter a sucessão

$$A_n = 500\left(1 + \frac{0,1}{n}\right)^n \rightarrow$$

$$\rightarrow 500e^{0,1} \approx 552,586\$00$$

(e poderia ser assim a introdução do nº de Neper)

**Curiosidade 2.** A taxa nominal, como já foi dito, é a taxa composta mensalmente. A que é igual a taxa anual efectiva  $T$  em função da taxa nominal  $J$  para um depósito inicial  $D$ ? Ora,  $T$  e  $J$  geram, de maneiras diferentes, a mesma quantia de dinheiro, portanto:

$$D(1+T) = D\left(1 + \frac{J}{12}\right)^{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \left(1 + \frac{J}{12}\right)^{12} - 1$$

Assim, quando se fala em, por exemplo, uma taxa anual nominal de 16%, está-se a considerar a taxa anual efectiva de

$$T = \left(1 + \frac{0,16}{12}\right)^{12} - 1 \approx 17,23\%$$

**Exemplo 2: Depósito poupança habitação, poupança reforma, etc.**

Depositando regularmente (digamos, no início de cada mês) uma quantia  $D$ , quanto é que se terá daqui a  $n$  meses?

Seja  $A_n$  o saldo no  $n$ -ésimo mês e  $T$  a taxa de juros composta mensalmente.

$$A_1 = D \rightarrow \text{quantia que se tem no } 1^\circ \text{ mês}$$

$$A_2 = A_1 + A_1T + D = D + D(1+T) \rightarrow \text{quantia que se tem no } 2^\circ \text{ mês (mês anterior e seus juros + depósito)}$$

$$A_3 = A_2 + A_2T + D = D + D(1+T) + D(1+T)^2 \rightarrow \dots$$

$$A_n = D + D(1+T) + D(1+T)^2 + \dots + D(1+T)^{n-1} = (\text{soma de } n \text{ termos consecutivos de}$$

$$\text{uma PG de razão } 1+T) = D \frac{1-(1+T)^n}{1-(1+T)} \text{ logo, } A_n = \frac{D}{T} \left[ (1+T)^n - 1 \right].$$

Assim, se depositarmos todos os meses, por exemplo, 50 contos num depósito poupança habitação, com juros anuais de 10% (e portanto, juros mensais iguais a

$$\frac{10}{12} \% \text{), teremos, ao fim de um ano: } A_{12} = \frac{50}{\frac{0,1}{12}} \times \left[ \left( 1 + \frac{0,1}{12} \right)^{12} - 1 \right] \approx 628,3 \text{ contos}$$

**Curiosidade.** Até há sensivelmente 2 anos atrás, o depósito poupança habitação não estava abrangido pelo "bónus" de 20% de IRS, ou seja, a taxa bruta era igual à taxa líquida.

Assim, e considerando o exemplo anterior, teremos não ,

$$T = \frac{0,1}{12} \text{ mas sim}$$

$$T = \frac{0,1}{12} \times 80\% = \frac{0,08}{12}$$

$$\therefore A_{12} \approx 622,5 \text{ contos}$$

(ou seja, quase 6 contos a entrarem para os cofres do Estado).

**Exemplo 3: Investimento, crédito ao consumo, empréstimo para a habitação, etc.**

Investe-se uma determinada quantia  $C$  (que foi herdada ou foi ganha no totoloto, etc.) de modo a poder recebê-la (numa quantia fixa  $A$ ) durante  $n$  períodos (suponhamos meses) juntamente com os respectivos juros. Ora, depositar agora  $C$  é o mesmo que, em cada mês que se recebe  $A$ , depositar uma certa quantia necessária para receber  $A$ , ou seja,  $C = D_1 + D_2 + \dots + D_n$  sendo  $D_k$  o investimento necessário para assegurar a quantia  $A$  no mês  $k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Tem-se:

$$A = D(1+T) \rightarrow \text{quantia que se recebe ao fim do } 1^\circ \text{ mês. } A = D(1+T)^2 \rightarrow \text{quantia que se recebe ao fim do } 2^\circ \text{ mês.}$$

$$A = D(1+T)^k \rightarrow \text{quantia que se recebe ao fim do } k\text{-ésimo mês. } \therefore D_k = \frac{A}{(1+T)^k}$$

$$\therefore C = \frac{A}{1+T} + \frac{A}{(1+T)^2} + \dots + \frac{A}{(1+T)^n} \rightarrow \text{quantia investida (soma de } n \text{ termos de uma PG de razão } \frac{1}{1+T}) = \frac{A}{1+T} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{1+T}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+T}}$$

$$\text{e finalmente } C = \frac{A}{T} \left[ 1 - \left( \frac{1}{1+T} \right)^n \right]. \text{ Por exemplo, se quisermos receber todos os meses 100 contos durante 2 anos, com}$$

$$\text{juros nominais de 11\%, devemos investir: } C = \frac{100}{\frac{0,11}{12}} \times \left[ 1 - \left( \frac{1}{1 + \frac{0,11}{12}} \right)^{24} \right] \approx 2145,6 \text{ contos. Outro exemplo é quando o banco}$$

investe num cliente que pede um empréstimo para compra de casa. Se o cliente pedir 10.000 contos a uma taxa anual de

$$12\% (1\% \text{ mensal), a prestação (fixa) a pagar em 20 anos será: } A = \frac{0,01 \times 10000}{1 - \left( \frac{1}{1,01} \right)^{240}} \approx 110 \text{ contos}$$

**Curiosidade 1.** Às vezes, a publicidade bem pode enganar. Por exemplo, o sr. Joseiro pretende comprar um automóvel e repara que a taxa mais baixa para concessão de crédito é de 16% no Banco Interior Luso. Portanto, pelas contas do sr. Joseiro (cuja intenção é a de conseguir um empréstimo de 1000 contos), deveria pagar (em 3 anos):

$$\frac{0,16}{12} \times 1000$$

$$1 - \left( \frac{1}{1 + \frac{0,16}{12}} \right)^{36} \approx 35.157\$00 \text{ por mês}$$

Contudo, o sr. Joseiro foi informado pelo banco que a taxa de juros a considerar é a taxa anual efectiva de encargos global que, entre outras

taxas menores, é preciso ter em conta os impostos de selo sobre o capital (7%) e sobre os juros (9%). Nestas condições, a taxa anual nominal passa a ser  $(16\% + 7\%) \times 1,09 = 25,07\%$

e a taxa anual efectiva será

$$\left( 1 + \frac{0,2507}{12} \right)^{12} - 1 \approx 28,16\% \text{ (bem}$$

diferente dos 16% anunciados)

Refazendo as contas, o sr. Joseiro afinal pagará por mês (nos tais 3 anos):

$$A = \frac{0,2816}{12} \times 1000$$

$$1 - \left( \frac{1}{1 + \frac{0,2816}{12}} \right)^{36} \approx 41.452\$00$$

**Curiosidade 2.** No exemplo sobre o empréstimo para compra de habitação, é curioso verificar que, nos tais 20 anos de duração do empréstimo, o cliente pagará

$$110 \times 240 = 26.400 \text{ contos}$$

isto é, mais 164% em relação à quantia que pediu. Isto não tem nada de anormal visto que, no primeiro mês, dos 110 contos a pagar, 100 são correspondentes aos juros:

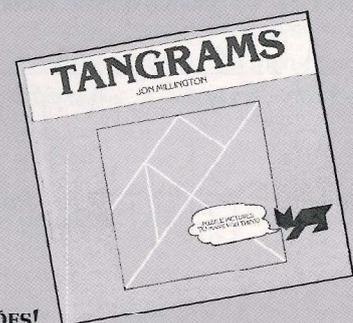
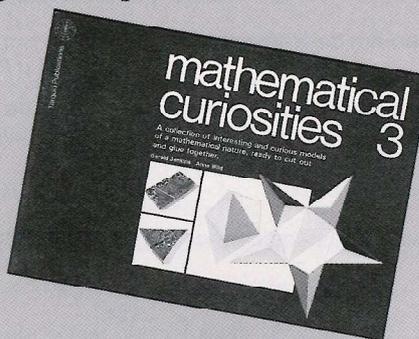
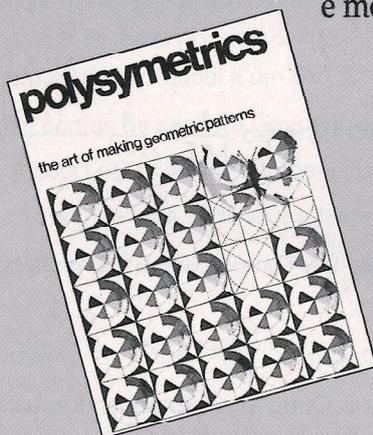
$$10.000 \times 0,01 = 100 \text{ contos}$$

Por isso, no 1º mês, o cliente apenas amortiza aproximadamente 10 contos dos 10 mil que pediu emprestado. Por sua vez, no 2º mês vai pagar juros de 9.990 contos e assim sucessivamente.

Roberto Oliveira  
Esc.Sec.Dr Ângelo Augusto da Silva  
Funchal

# MATERIAIS PARA ENSINO DA MATEMÁTICA

Livros, posters e jogos para desenvolver capacidades matemáticas, para vários níveis etários, a partir de actividades, jogos, recortes e montagens, sempre de um modo divertido e atraente.



MAIS DE 70 TITULOS! PEÇA-NOS INFORMAÇÕES!  
REPRESENTANTE EXCLUSIVO



**EDITORA REPLICAÇÃO**

Avenida Infante Santo, 343, r/c Esqº  
1350 LISBOA

Tel. 397 70 58 e 396 63 08 Fax. 396 98 08

Nome \_\_\_\_\_

Morada \_\_\_\_\_

Localidade \_\_\_\_\_

Código Postal \_\_\_\_\_

