As progressões geométricas no cálculo financeiro

Roberto Oliveira

Com a imensa publicidade que se faz hoje em dia ao crédito ao consumo, a que de certeza os estudantes não serão alheios, não devemos deixar passar em claro a importância das progressões, também no cálculo financeiro. Este artigo refere apenas algumas situações reais que nos podem levar a fazer diversos trabalhos com os alunos.

Exemplo1: Depósitos a prazo

Depositando uma quantia D, quanto é que se terá daqui a n períodos? (em muitos bancos, o período é diário ou mensal).

Seja A_n o saldo após n períodos (suponha-se anos) e T a taxa de juros composta nesse período (isto é, juros capitalizáveis).

Então:

$$A_1 = D + DT = D(1+T)$$
$$A_2 = A_1 + A_1T = D(1+T) + [D(1+T)]T = D(1+T)^2$$
$$A_3 = A_2 + A_2T = \ldots = D(1+T)^3$$
$$\ldots$$
$$A_n = D(1+T)^n$$
$$\therefore A_n = D + \underbrace{DT + DT(1+T) + DT(1+T)^2 + \ldots + DT(1+T)^{n-1}}_{\text{Soma de } n \text{ termos consecutivos de uma PG de razão } 1+T}$$

Curiosidade 1. A senhora Gaudência deposita 500 contos a prazo à taxa anual nominal de 10%. Que quantia terá daqui a um ano ?

Pelas contas da senhora Gaudência,

$A_1 = 500(1+0,1)^1 = 550$ contos.

No entanto, a taxa nominal é a taxa composta mensalmente, $\therefore T = \frac{10}{12}\%$

e, assim, $A_1 = 500\left(1+\frac{0,1}{12}\right)$, quantia após o 1º mês, $A_2 = A_1\left(1+\frac{0,1}{12}\right)$, quantia após o 2º mês, etc., e finalmente $A_{12} = A_{11}\left(1+\frac{0,1}{12}\right)$, quantia após o 12º mês, isto é,

$$A_{12} = 500\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{12} \approx 552.357\$00$$

Portanto, é (um pouco) melhor quando os juros são compostos mensalmente. E se fossem compostos diariamente? Teríamos:

$$A_{365} = 500\left(1+\frac{0,1}{365}\right)^{365} \approx 552.579\$00$$

Claro que estes períodos pequenos só interessam para quantias elevadas que sejam depositadas. De qualquer maneira, para períodos cada vez mais pequenos, iremos ter a sucessão

$$A_n = 500\left(1+\frac{0,1}{n}\right)^n \to$$
$$\to 500e^{0,1} \approx 552.586\$00$$

(e poderia ser assim a introdução do nº de Neper)

Curiosidade 2. A taxa nominal, como já foi dito, é a taxa composta mensalmente. A que é igual uma taxa anual efectiva T em função da taxa nominal J para um depósito inicial D? Ora, T e J geram, de maneiras diferentes, a mesma quantia de dinheiro, portanto:

$$D(1+T) = D\left(1+\frac{J}{12}\right)^{12} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow T = \left(1+\frac{J}{12}\right)^{12} - 1$$

Assim, quando se fala em, por exemplo, uma taxa anual nominal de 16%, está-se a considerar a taxa anual efectiva de

$$T = \left(1+\frac{0,16}{12}\right)^{12} - 1 \approx 17,23\%$$

Exemplo 2: Depósito poupança habitação, poupança reforma, etc.

Depositando regularmente (digamos, no início de cada mês) uma quantia D, quanto é que se terá daqui a n meses?

Seja A_n o saldo no n-ésimo mês e T a taxa de juros composta mensalmente.

$A_1 = D \to$ quantia que se tem no 1º mês

$A_2 = A_1 + A_1T + D = D + D(1+T) \to$ quantia que se tem no 2º mês (mês anterior e seus juros + depósito)

$A_3 = A_2 + A_2T + D = D + D(1+T) + D(1+T)^2 \to, \ldots,$

$A_n = D + D(1+T) + D(1+T)^2 + \ldots + D(1+T)^{n-1}$ = (soma de n termos consecutivos de uma PG de razão $1+T) = D\frac{1-(1+T)^n}{1-(1+T)}$ logo, $A_n = \frac{D}{T}\left[(1+T)^n - 1\right]$.

Assim, se depositarmos todos os meses, por exemplo, 50 contos num depósito poupança habitação, com juros anuais de 10% (e portanto, juros mensais iguais a $\frac{10}{12}\%$), teremos, ao fim de um ano: $A_{12} = \frac{50}{\frac{0,1}{12}} \times \left[\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{12} - 1\right] \approx 628,3$ contos

Curiosidade. Até há sensivelmente 2 anos atrás, o depósito poupança habitação não estava abrangido pelo "bónus" de 20% de IRS, ou seja, a taxa bruta era igual à taxa líquida.

Assim, e considerando o exemplo anterior, teremos não ,

$T = \frac{0,1}{12}$, mas sim

$T = \frac{0,1}{12} \times 80\% = \frac{0,08}{12}$.

$\therefore A_{12} \approx 622,5$ contos

(ou seja, quase 6 contos a entrarem para os cofres do Estado).

Exemplo 3: Investimento, crédito ao consumo, empréstimo para a habitação, etc.

Investe-se uma determinada quantia C (que foi herdada ou foi ganha no totoloto, etc.) de modo a poder recebê-la (numa quantia fixa A) durante n períodos (suponhamos meses) juntamente com os respectivos juros. Ora, depositar agora C é o mesmo que, em cada mês que se recebe A, depositar uma certa quantia necessária para receber A, ou seja, $C = D_1 + D_2 + \ldots + D_n$ sendo D_k o investimento necessário para assegurar a quantia A no mês k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tem-se:

$A = D(1+T) \to$ quantia que se recebe ao fim do 1º mês, $A = D(1+T)^2 \to$ quantia que se recebe ao fim do 2º mês .

$A = D(1+T)^k \to$ quantia que se recebe ao fim do k-ésimo mês, $\therefore D_k = \frac{A}{(1+T)^k}$

$\therefore C = \frac{A}{1+T} + \frac{A}{(1+T)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+T)^n} \to$ quantia investida (soma de n termos de uma PG de razão $\frac{1}{1+T}$) $= \frac{A}{1+T} \times \frac{1-\left(\frac{1}{1+T}\right)^n}{1-\frac{1}{1+T}}$

e finalmente $C = \frac{A}{T}\left[1-\left(\frac{1}{1+T}\right)^n\right]$. Por exemplo, se quisermos receber todos os meses 100 contos durantes 2 anos, com juros nominais de 11%, devemos investir: $C = \frac{100}{\frac{0,11}{12}} \times \left[1-\left(\frac{1}{1+\frac{0,11}{12}}\right)^{24}\right] \approx 2145,6$ contos. Outro exemplo é quando o banco investe num cliente que pede um empréstimo para compra de casa. Se o cliente pedir 10.000 contos a uma taxa anual de 12% (1% mensal), a prestação (fixa) a pagar em 20 anos será: $A = \frac{0,01 \times 10000}{1-\left(\frac{1}{1,01}\right)^{240}} \approx 110$ contos

Curiosidade 1. Às vezes, a publicidade bem pode enganar. Por exemplo, o sr. Joseiro pretende comprar um automóvel e repara que a taxa mais baixa para concessão de crédito é de 16% no Banco Interior Luso. Portanto, pelas contas do sr. Joseiro (cuja intenção é a de conseguir um empréstimo de 1000 contos), deveria pagar (em 3 anos):

$$\frac{\frac{0,16}{12}\times 1000}{1-\left(\frac{1}{1+\frac{0,16}{12}}\right)^{36}} \approx 35.157\$00 \text{ por mês}$$

Contudo, o sr. Joseiro foi informado pelo banco que a taxa de juros a considerar é a taxa anual efectiva de encargos global que, entre outras taxas menores, é preciso ter em conta os impostos de selo sobre o capital (7%) e sobre os juros (9%). Nestas condições, a taxa anual nominal passa a ser $(16\%+7\%)\times 1{,}09 = 25{,}07\%$

e a taxa anual efectiva será

$$\left(1+\frac{0,2507}{12}\right)^{12}-1\approx 28,16\% \text{ (bem}$$

diferente dos 16% anunciados)

Refazendo as contas, o sr. Joseiro afinal pagará por mês (nos tais 3 anos):

$$A=\frac{\frac{0,2816}{12}\times 1000}{1-\left(\frac{1}{1+\frac{0,2816}{12}}\right)^{36}} \approx 41.452\$00$$

Curiosidade 2. No exemplo sobre o empréstimo para compra de habitação, é curioso verificar que, nos tais 20 anos de duração do empréstimo, o cliente pagará

$$110\times 240 = 26.400 \text{ contos}$$

isto é, mais 164% em relação à quantia que pediu. Isto não tem nada de anormal visto que, no primeiro mês, dos 110 contos a pagar, 100 são correspondentes aos juros:

$$10.000\times 0,01 = 100 \text{ contos}$$

Por isso, no 1º mês, o cliente apenas amortiza aproximadamente 10 contos dos 10 mil que pediu emprestado. Por sua vez, no 2º mês vai pagar juros de 9.990 contos e assim sucessivamente.

Roberto Oliveira
Esc.Sec.Dr Ângelo Augusto da Silva
Funchal