A Curva do Dragão

Maria João Peres Costa, Instituto de Inovação Educativa

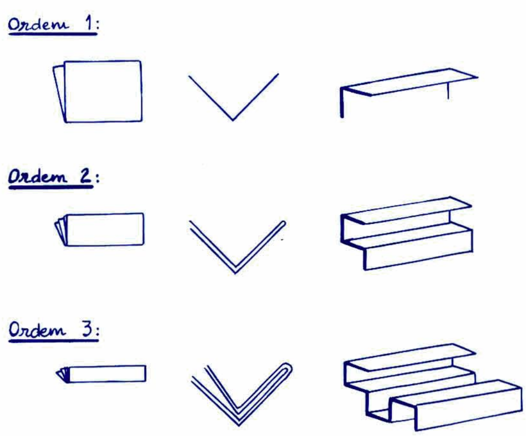
A «curva do dragão» é uma figura curiosa, que pode ser gerada por vários processos e se adequa perfeitamente a diversos tipos de abordagem e desenvolvimento.

Manipulação

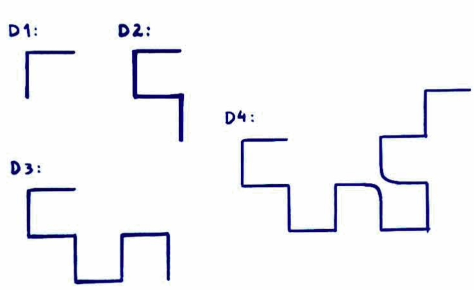
O processo original para obter a Curva do Dragão consiste em tomar uma folha de papel, dobrá-la ao meio e abri-la de forma a obter um ângulo recto: temos assim um dragão de ordem 1.

Para um dragão de ordem 2, o processo é o mesmo com a diferença de se ter de fazer duas dobras. Em seguida a folha é novamente aberta de forma a que as dobras formem entre si ângulos rectos. Para um dragão de ordem **n** será necessário dobrar o papel ao meio **n** vezes seguidas, sempre no mesmo sentido.

Na figura 1 temos representado o processo de construção dos dragões de ordem 1, 2 e 3:

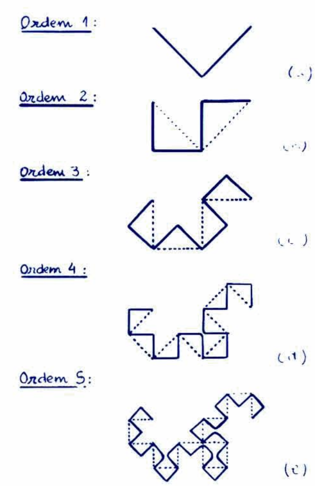


A figura 2 representa vários dragões:



Geometria

Existe também um processo geométrico para construir dragões, que está representado na figura 3. Este processo parte inicialmente de um ângulo recto (a). Cada um dos lados é tomado, em seguida, como hipotenusa de um triângulo rectângulo. Construindo esses triângulos, os seus catetos formam, então, dois ângulos rectos que constituem o dragão de ordem 2 (b). O processo repete-se, substituindo sempre cada segmento de recta, considerado como hipotenusa, pelos catetos do triângulo rectângulo respectivo, ficando cada novo ângulo alternadamente para um e outro lado da curva anterior (c, d, e).



Propomo-vos agora que procurem, por dobragens ou geometricamente, construir um dragão de ordem 6.

Álgebra

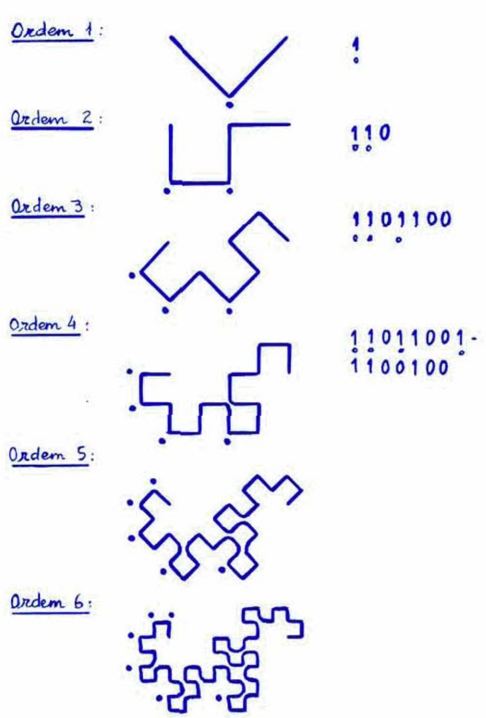
Um terceiro processo para a construção da curva do dragão recorre à representação binária: representemos por «1» as curvas à esquerda e por «0» as curvas à direita. A fórmula que nos permite obter o número de qualquer curva obtém-se por recorrência:

- toma-se o número do dragão de ordem imediatamante inferior, que designaremos por **a**;
- seja **b** o número que se obtém trocando o algarismo central de **a**;
- o número do nosso dragão será **a1b.** Vejamos um exemplo: o número do dragão de ordem 1 é, naturalmente, 1. Teremos neste caso a = 1, b = 0. Desta forma o número do dragão de ordem 2 é 110.

Para o dragão de ordem 3 teremos a = 110, b = 100. O número pretendido é 1101100. Pela mesma ordem de ideias, o dragão de ordem 4 tem por número associado 110110011100100.

Será capaz de determinar os números associados aos dragãos de ordem 5 e 6?

Verifica-se um facto curioso relativamente a esta Curva do Dragão . Na figura 4, estão representados alguns dragões em que foram marcados alguns pontos. Esses pontos são obtidos da seguinte forma: para a ordem 1, marcamos um ponto no único vértice existente. Na curva correspondente à ordem 2 mantemos o ponto anteriormente marcado e marcamos um segundo ponto, correspondente ao algarismo central 1 do número associado à curva. O processo repete-se, acrescentando sempre em cada ordem o ponto correspondente ao algarismo central 1 do número que descreve a curva. Ora verifica-se que, qualquer que seja a ordem do dragão, estes pontos situam-se sobre uma espiral logarítmica!



Logo

Uma interessante actividade de programação em LOGO é a construção de um programa para desenhar a Curva do Dragão, correspondente a uma ordem dada. Esta actividade implica o recurso a listas, utilizando procedimentos recursivos e variáveis.

O *programa que a seguir se apresenta está escrito* em SINCLAIR LOGO e assenta em dois subprocedimentos: DN e DES. Estes dois procedimentos são depois integrados, juntamente com um terceiro subprocedimento, num procedimento global, DRAGÃO, que requer um *input* numérico e que, ao ser chamado, desenha a curva do Dragão de ordem correspondente ao *input* dado. Assim, Dragão 4 desenha uma curva do dragão de ordem 4.

O subprocedimento DN :N constrói, por recursão, a lista correspondente ao número associado ao dragão de ordem N que se pretende desenhar. Quando esse processo termina, é chamado o subprocedimento DES :A que analisa sucessivamente cada um dos elementos dessa lista: se o elemento encontrado é 0, a tartaruga roda 90º para a direita; caso contrário, roda 90º para a esquerda. O processo é novamente recursivo até se esgotarem todos os elementos da lista e ficar desta forma concluído o desenho de curva do dragão.

O subprocedimento D1 só é chamado quando se pretende desenhar um dragão de ordem 1.

A listagem completa dos procedimentos é a seguinte:

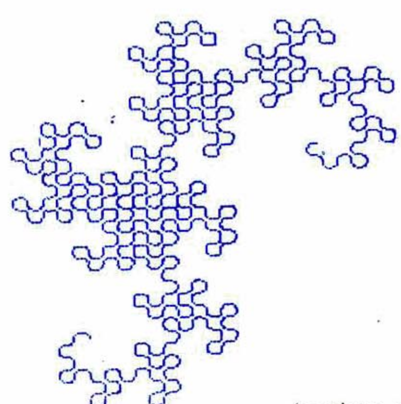
```
TO DRAGAO :N
CS
IF EQUALP :N 1 [D1 STOP]
MAKE "A 1
MAKE "B 0
DN :N - 1
END

TO D1
FD 50
RT 90
FD 50
END

TO DN :N
IF EQUALP :N 0 [PU SETPOS [20 -4
5] PD DES :A STOP]
MAKE "X ( SE :A 1 :B )
MAKE "Y ( SE :A 0 :B )
MAKE "A :X
MAKE "B :Y
DN :N - 1
END

TO DES :A
HT FD 1
IF EQUALP :A [] [STOP]
IF EQUALP FIRST :A 0 [REPEAT 5 [
FD 1 RT 18]] [REPEAT 5 [FD 1 LT
18]]
DES BF :A
END
```

A figura 5 representa um dragão de ordem 9 desenhado em LOGO.



(continua na pág. 36)

por terem indicado uma escola C + S. Por outro lado é interessante notar já a presença de alguns estudantes (2%) — alunos das licenciaturas em ensino — e de uma percentagem, talvez não esperada, de professores do Ensino Superior (11%) que se deve à grande adesão de professores das escolas superiores de Educação. Finalmente, talvez esperada mas nem por isso menos reveladora, é a percentagem dos sócios que são professores do ensino Primário (1%). Na verdade, teremos que ter isto bem presente, a APM terá que oferecer muito a esses professores, que não são só de Matemática, fazendo-os sentir que vale a pena ser sócio desta associação. A experiência destes professores, porque lidam com alunos muito novos, com uma apetência forte pela aprendizagem, porque trabalham em contextos mais globais, de carácter potencialmente interdisciplinares e integradores, é-nos, de certeza, importante. É preciso mais professores do ensino primário na APM!

Por último, o gráfico 3 indica-nos que os sócios da APM constituem um corpo de professores profissionalizados (74%).

A APM está pois a crescer... e crescerá mais, por certo!

A Curva do Dragão *(continuação)*

Matemática e decoração

A curva do dragão permite o levantamento de inúmeras questões:

- haverá outros processos para a obter?
- que acontece se «1» for virar à direita e «0» à esquerda?
- e se as dobras do papel forem feitas alternadamente num e noutro sentido? Que curva obteremos?
- que formas há de unir vários dragões?

Esta última questão torna-se particularmente interessante se se tentarem unir os vários dragões sem que haja intersecção. Pode-se tentar unir os extremos correspondentes, mas também extremos opostos ou mesmos zonas intermédias das várias curvas. Pode-se também unir vários dragões para provocar pavimentações ou desenhar figuras simétricas. As combinações possíveis são múltiplas e um dos matemáticos que se dedicou ao estudo da curva do Dragão, Donald Knuth, chegou a utilizar dragões de ordem 9 para obter três tipos diferentes de azulejos com os quais revestiu uma parede da sua própria casa.

Dragões decorativos, porque não?

Bibliografia

Gardner, Martin (1981). *Math Festival.* Paris: Pour la science.

Manifesto para a criação de um Seminário Nacional de História da Matemática

1 — Como as comemorações alusivas aos 200 anos da morte de José Anastácio da Cunha mostraram:

a) a história da matemática em Portugal tem ainda muito por fazer;

b) a história da matemática é pouco conhecida em Portugal;

c) existe um grande interesse em Portugal pela história da matemática.

2 — Justifica-se, pois, que se incentivem em Portugal os estudos de tudo o que se relacione com a história da matemática, nomeadamente a história da matemática pura e aplicada (desde a lógica à computação), a história do ensino da matemática, o ensino da história da matemática, a filosofia da matemática, etc.

3 — Esses estudos podem ser integrados numa estrutura informal designada por **«Seminário Nacional de História da Matemática»**, que agregará todos os interessados em trabalhar (a tempo total ou parcial) nas áreas atrás referidas, não havendo qualquer limitação quanto a habilitações (licenciados em matemática ou não) ou profissão (professores dos ensino superior, do ensino secundário ou outras profissões).

4 — Os participantes no seminário reunir-se-ão um certo número de vezes por ano em locais a designar; para cada ano será designado um tema prioritário de que todos os participantes, mesmo os que não estejam a estudar assuntos relacionados com esse tema, se devem procurar informar para que os seminários possam ser sobretudo um lugar de frutífero debate.

5 — Todos os anos será designado um coordenador (diferente de ano para ano) dos trabalhos desse ano.

6 — Para incentivar os contactos com estudiosos estrangeiros, todos os anos deverá haver pelo menos um professor visitante que, além de participar pelo menos numa sessão do seminário, fará conferências em diversos locais, esperando-se que possam ser encetados projectos de investigação com participantes do seminário.

7 — Será incentivada a participação activa em encontros internacionais de participantes do seminário.

8 — Será procurado o patrocínio da Sociedade Portuguesa de Matemática e de outras instituições de âmbito científico-cultural.