Investigar na aula de Matemática

Lina Brunheira
Helena Fonseca

"Oh professora, investigações com espelhos!? O que é isso?" Foi assim que o Pedro reagiu, naquele dia, ao olhar para o sumário que estava escrito no quadro. Esta aula, de que vamos falar, enquadrou-se num capítulo de Geometria do 7º ano, embora se tenha realizado numa turma do 8º ano. Nela experimentámos uma ficha de trabalho envolvendo investigações com espelhos.

No último ano lectivo, leccionámos os mesmos anos de escolaridade, na mesma escola. Assim, pudemos trabalhar em conjunto na preparação das aulas e, ao mesmo tempo, pudemos analisá-las e discuti-las no sentido de aperfeiçoar o trabalho futuro. Foi com este objectivo que organizámos esta aula, na qual participámos as duas, uma como professora da turma e a outra como observadora.

Para a realização desta actividade organizámos os alunos aos pares, distribuímos uma ficha de trabalho por aluno e um livro de espelhos por cada par. Pedimos também que cada par entregasse por escrito as respostas às questões 3, 4 e 5. Esta ficha ocupou-os durante duas aulas. Na primeira delas, começaram por mostrar alguma surpresa em relação ao novo material com que iam trabalhar. Após serem distribuídas as fichas e os espelhos, muitos alunos começaram por encarar o espelho não como um material de trabalho, mas sim como habitualmente o utilizam. Depois desta fase inicial, começaram a trabalhar e a utilizar o espelho nas suas investigações. Para transmitir melhor como decorreu a aula, vamos ilustrar a nossa descrição com alguns diálogos.

Sandra: Oh professora, os espelhos são para quê?

Prof.: Já leste com atenção o início da ficha?

Sandra: Mais ou menos...

Como nos apercebemos que alguns alunos estavam com dificuldade em iniciar o trabalho, resolvemos explicar para toda a turma o fim a que se destinava o espelho.

As investigações acerca dos eixos de simetria dos vários polígonos regulares tomaram várias formas. Uns alunos descobriam todos os eixos de simetria colocando o espelho em todas as posições sobre a figura. Outros, depois de uma investigação inicial com o espelho, imaginavam o eixo de simetria e desenhavam-no já sem a ajuda do material.

Entretanto, alguns alunos começavam já a preencher a tabela.

Marco: Mas não há aqui polígonos de quatro lados.

Prof.: Então como se chama um polígono regular de quatro lados?

Marco: Ah claro! É um quadrado. Está no caderno.

Depois de ter encontrado 3 eixos de simetria no triângulo, 4 no quadrado e 5 no pentágono, a Carla disse um pouco insegura:

— Estou a ter uma ideia mas não sei se está certa.

Atacou então o hexágono já com a sua conjectura que, no entanto, não se arriscou a explicitar.

Enquanto observávamos o trabalho dos alunos, percebemos que, apesar de já terem chegado à conclusão pretendida na questão 2, a maioria deles manifestava uma certa relutância em explicá-la por escrito.

Ainda na primeira aula, muitos alunos chegaram a avançar com as investigações sobre eixos de simetria em triângulos, quadriláteros e no círculo. A primeira reacção da maioria foi responder de imediato que um triângulo tem três eixos de simetria, pois naturalmente identificam um triângulo como sendo sempre equilátero. Foi então necessário chamar-lhes a atenção para a existência de outros.

No final desta aula recolhemos as respostas pedidas para posteriormente serem analisadas. A questão relativa aos eixos de simetria do círculo foi a que recolheu respostas mais interessantes. Quase todos os alunos sabem intuitivamente que existem infinitos eixos, mas substituem esse termo por outros não equivalentes, tais como: muitos, *montes*, milhares, milhões, ... Houve apenas algumas respostas como 4, 8, 30 e 360! Para além do esboço a ilustrar a resposta, alguns acrescentaram ainda que os eixos têm de passar pelo centro e uma aluna afirmou que estes são os "diâmetros".

Na segunda aula, os alunos exploraram primeiro a parte II da ficha e depois passámos a uma fase de discussão do trabalho realizado. O problema das estrelas não apresentou dificuldades iniciais. Os alunos perceberam como tinham de colocar os espelhos e contaram bem o número de pontas. Ultrapassada esta fase alguns alunos deram o problema por terminado.

Rui: Professora, já acabei.

Prof.: Então qual foi a relação que descobriste?

Rui: Relação!? O que é isso?

Prof.: Tenta descobrir que ligação existe entre o ângulo formado pelos espelhos e o número de pontas da estrela.

Daniel: Então, quanto mais abrimos o livro, menos pontas temos.

Rui: Quanto maior for o ângulo, menor é o número de pontas!

Prof.: Sim, é verdade. Mas podem descobrir mesmo uma regra. Por exemplo, se o ângulo for de 60°, conseguirão descobrir o número de pontas da estrela sem utilizarem o livro?

Hugo: São seis.

Prof.: Como descobriste?

Hugo: São seis porque temos de multiplicar o 60° por 6 para dar 360°, que é a volta toda.

João: Não estou a perceber nada.

Hugo: Não vês que as multiplicações dão sempre 360°, 120° x 3 = 360°, 36° x 10 = 360°, 72° x 5 = 360°.

Prof.: Então qual é a regra?

Ana: O ângulo vezes o número de pontas dá sempre 360°.

Durante a aula alguns alunos inventaram ainda novas explorações:

Luísa: Oh professora, se em vez de uma ponta de estrela tivermos um traço, podemos obter um triângulo, um quadrado, um pentágono, ...

Prof.: Muito bem! Também podes tentar encontrar uma regra para esse caso.

Entretanto tocou. Enquanto arrumavam as suas coisas, alguns alunos manifestavam o seu agrado por este tipo de aulas.

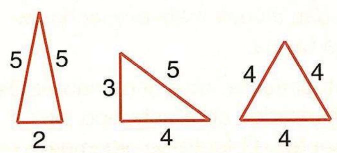
Investigações em Matemática

Uma investigação matemática é uma viagem até ao desconhecido. Ela torna possível aproximarmo-nos da matemática do mesmo modo que os matemáticos o fazem, porque seremos nós a escolher quais as direcções a seguir.

O processo de investigação matemática pode ser ilustrado pela chamada metáfora geográfica: "O importante é explorar um aspecto da matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem e não o destino" (Pirie, 1987, citado em Ernest, 1991, p.285). No caso da resolução de problemas, o objectivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. Consideramos este um processo convergente ao contrário da investigação matemática que é um processo divergente.

Um exemplo de uma "investigação pura" é descrito por Lerman (1989, p. 77). Num seminário de pós-graduação com alunos que não eram de matemática, ele apresentou a seguinte investigação:

> Considera os triângulos de lados inteiros e de perímetro 12. Investiga.



Alguns grupos ficaram desconcertados, dizendo que não percebiam o que se pretendia, já que nenhuma questão fora colocada. Outros grupos trabalharam em áreas de triângulos, perímetros de triângulos e de rectângulos, etc. Todos os grupos consideraram esta investigação bem diferente das que já tinham experimentado anteriormente, e ao mesmo tempo muito desafiante.

A atitude de desorientação que Lerman descreve em alguns alunos é natural ser observada em actividades tão abertas como esta. Devemos então considerar uma fase anterior a este nível de propostas. A aula que acabámos de descrever é exemplo disso. A actividade de investigação que apresentámos possuía algumas linhas condutoras, no entanto, havia espaço para que os alunos enveredassem por caminhos diferentes fazendo novas descobertas e criando outras questões, tal como aconteceu com a Luísa.

Qual o valor de uma investigação matemática?

Sabendo que este trabalho levanta algumas dificuldades, porquê propô-lo? Ao analisar várias situações, ao construir estratégias e ao descobrir soluções, o aluno poderá melhorar a capacidade de **resolver problemas quer na matemática, quer na vida real.**

As actividades de investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos **trabalharem em grupo**. Deste modo, mais facilmente se conjugam ideias e se ultrapassam dificuldades. O grupo aumenta também a confiança em enfrentar novos problemas e promove a discussão entre alunos.

Quando propomos actividades de investigação corremos por vezes o risco dos alunos seguirem por um caminho errado. No entanto, torna-se necessário que seja a própria experiência a mostrar o erro. Não dizer logo se as ideias avançadas pelos alunos estão certas ou erradas parece encorajá-los a desenvolver melhor as suas próprias ideias. Se o aluno não consegue sair do erro em que se envolveu, então será necessário ajudá-lo a perceber que escolheu um caminho incorrecto.

Outro aspecto importante é o **apoio que o professor poderá prestar**. Neste tipo de actividades é vulgar surgirem questões não rotineiras, que suscitam nos alunos uma certa insegurança, e que por vezes os leva a desistir facilmente. Foi o que aconteceu com o Rui que terminou o seu trabalho quando lhe surgiu uma questão mais problemática. Nesta altura é essencial a intervenção do professor dando orientações, ajudando à interpretação e tentando de outra forma que os alunos descubram o que se pretende. Recordemos a discussão:

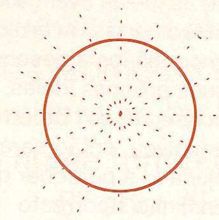
Rui: Quanto maior for o ângulo, menor é o número de pontas!

Prof.: Sim, é verdade. Mas podem descobrir mesmo uma regra. Por exemplo, se o ângulo for de 60°, conseguirão descobrir o número de pontas da estrela sem utilizar o livro?

As sugestões do professor devem ser eficazes, contudo não devem deixar o aluno com a impressão que não foi ele que respondeu à questão. As melhores sugestões são as que questionam os alunos e não as que lhes respondem directamente às questões. Elas devem levá-los a descobrir as limitações das suas abordagens, ou a clarificar as suas próprias ideias.

O perigo de algumas orientações é que estas retirem a parte mais relevante de uma investigação matemática: a de descobrir uma estratégia adequada. Ao aluno não deverá restar apenas a tarefa secundária de fazer alguns cálculos.

Pedir aos alunos que **expliquem por escrito** o seu raciocínio e as suas descobertas é um aspecto que melhora a capacidade de comunicação oral e escrita. Por outro lado, este é também um momento de reflexão sobre aquilo que acabaram de explorar. Eventualmente, também poderá ser apropriado pedir um esboço que ilustre a resolução de um problema. O desenho ao lado é um exemplo claro deste procedimento.



Uma fase muito importante em actividades de investigação é a **discussão**, com toda a turma, do trabalho realizado. É nesta altura que os alunos apresentam os resultados das suas investigações e que o professor tem oportunidade de clarificar ideias, de modo a esclarecer eventuais dúvidas. Será recomendável guardar para esta fase algumas questões mais ambiciosas, pois deste modo, e com a ajuda do professor, os alunos poderão fazer raciocínios mais complexos, o que garantirá a compreensão do problema.

Dificuldades a enfrentar

A introdução de actividades de investigação na aula de matemática levanta dificuldades que merecem alguma reflexão. Uma das possíveis dificuldades relaciona-se com a **gestão do tempo**. Os alunos necessitam de tempo para compreender e analisar o problema, no entanto, não se deverá prolongar demasiado a actividade pois isso poderá conduzir a uma perda de motivação. Por outro lado, os alunos têm ritmos diferentes e, embora tenhamos de respeitar isso, não podemos esperar pelos mais demorados todo o tempo necessário. Se o fizermos, corremos o risco de haver uma dispersão por parte dos alunos e de perder o controlo da aula.

Outro aspecto a considerar é o **nível das propostas** apresentadas. Todas elas deverão conter algumas tarefas acessíveis a todos os alunos, caso contrário poderá desencadear-se um sentimento de frustração naqueles que têm mais dificuldades o que, em última análise, conduzirá também a uma dispersão. A Carla, que interveio na primeira aula, é uma aluna esforçada, no entanto, com dificuldades e alguma insegurança. Para ela esta actividade foi bastante significativa, pois ao perceber que também era capaz de responder às propostas, o seu entusiasmo cresceu e tornou-se uma das alunas mais empenhadas nesta tarefa.

Habitualmente, os alunos não estão familiarizados com este tipo de propostas. O facto de algumas questões serem mais abertas coloca-lhes dificuldades, as quais se reflectirão no trabalho do professor. Estas questões são de alguma forma caracterizadas por terem objectivos pouco definidos, o que torna necessário o recurso a capacidades como a intuição de modo a encontrar uma possível estratégia de resolução. Além disso, os alunos normalmente esperam encontrar questões relacionadas com o capítulo em estudo e resolver exercícios e problemas pela simples aplicação dos conhecimentos adquiridos. Quando isto não acontece, é natural que manifestem alguma insegurança e uma maior dependência em relação ao professor.

Como Lerman (1989, p. 74) afirma, o maior obstáculo à consideração de um currículo orientado para o processo de fazer matemática é a nossa própria relutância, como professores, cuja formação esteve sempre ligada aos conteúdos. Citando o autor:

> Eu lembro-me da minha reacção alguns anos atrás, quando me foi oferecido o lugar de investigador matemático numa equipa de cientistas, para a construção do modelo matemático da poluição de um importante lago. Eu não me lembrava de ter estudado *Modelos matemáticos de lagos* na Universidade e, num estado de pânico, recusei o trabalho. Eu não me estava a ver ser capaz de fazer matemática de uma forma criativa, mas apenas a reproduzir o que me tinham ensinado.

Nota: A elaboração da ficha de trabalho e a análise da actividade relatada neste artigo foram levadas a cabo no grupo de Geometria do projecto "Matemática Para Todos — Investigações na Sala de Aula", que se desenvolve no âmbito do CIEFCUL (Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa).

Referências

Lerman, Stephen (1989). Investigations: Where to Now? Em Paul Ernest (ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art.* NY, Falmer Press.

Ernest, Paul (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* NY, Falmer Press.

Lina Brunheira
Esc. Sec. Eça de Queiroz
Helena Fonseca
Esc. Sec. Luisa de Gusmão