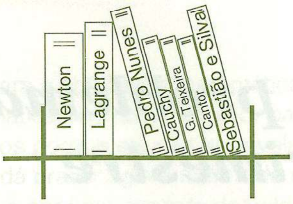
Para este número seleccionámos



O "quê", o "porquê" e o "como" em matemática

John Mason

O artigo de João Pedro Ponte publicado neste número pode ser interpretado, relativamente à utilização dos computadores no ensino da Matemática, como um alerta para a situação de marasmo em que hoje vivemos a este respeito. A posição dianteira que possuíamos, no fim dos anos 80, devido ao Projecto Minerva, não no número de computadores nas escolas, mas na experiência reflectida sobre a sua utilização no ensino da Matemática, poderia ter conduzido a uma situação em que, devido aos avanços tecnológicos nos computadores, muitos alunos e professores pudessem, como John Mason, considerar excitante "viver e trabalhar numa época em que a verdadeira natureza do que constitui a matemática está em evolução". Não é essa, infelizmente, a situação actual. Para compreender o que estamos a perder e como é importante lutar para que a situação mude tão cedo quanto possível, aqui deixamos este artigo publicado na revista Micromath *por John Mason, professor da Open University.*

Considero deveras excitante viver e trabalhar numa época em que a verdadeira natureza do que constitui a matemática está em evolução. A existência de ecrãs onde se podem traçar gráficos, de microprocessadores poderosos e ainda a possibilidade de manipulação directa de objectos no ecrã, está a reorientar substancialmente a direcção em que se desenvolve a matemática, transformando o modo como as ideias matemáticas são apresentadas e o modo como as pessoas se relacionam com o pensamento matemático e o aplicam.

A principal questão que pretendo tratar neste artigo é a separação que se está a dar entre o "quê", o "porquê" e o "como" em matemática e as consequências que tal facto está a ter, e terá, no ensino e na aprendizagem da Matemática. Estou particularmente preocupado com a crescente insatisfação entre os professores do Ensino Superior, acerca do que os alunos sabem fazer, o que querem retirar da sua educação, o que significa agora aprender matemática e como isto está relacionado com o que se passa na escola.

O fenómeno da manipulação directa de objectos no ecrã

Platão queixava-se acerca do modo como as crianças gregas eram educadas, louvando a orientação prática dos métodos de ensino no Egipto, através de jogos e actividades. O reconhecimento da importância das actividades práticas, da manipulação com vista à atribuição de significado a uma ideia e depois da passagem gradual da "atribuição de significado" à "articulação", ou seja à exposição clara da ideia (abstraindo portanto do contexto particular), foi proclamado vezes sem conta em educação matemática, através de Dewey, Piaget, Bruner, Vygotsky & Davidov, Froebels, Montessori, Gattegno e Skemp. Essa importância é promovida na formação inicial e contínua de professores (onde ainda existe) na Grã Bretanha e em muitos outros países. Na *Open University* [Universidade Aberta inglesa — n.t.] promovêm-la através de enquadramentos como *Do-Talk-Record* (Faça-Fale-Registe) e *Manipulating-Getting-a-sense-of-Articulating* (Manipular -Dar sentido-Articular).

Mas fazer actividades não é em si suficiente, pois a atribuição de significado não resulta automaticamente da manipulação. Também a capacidade de articular uma ideia não resulta automaticamente da atribuição de significado. Para encorajar e apoiar estas transições é requerida a atenção de um perito, o professor.

Os objectos no ecrã proporcionam uma nova forma de instrumento ou material manipulável. Por exemplo, a linguagem Logo, em particular os gráficos da tartaruga, oferecem à criança o acesso directo à construção de comandos para fazer a tartaruga desenhar no ecrã. O interface entre a tartaruga e a criança reside nos comandos, proporcionando uma situação em que o utilizador (mas não será assim se não for guiado para determinados objectivos) imagina o que quer que aconteça e transforma isso em articulação na linguagem do computador (possivelmente através de palavras). Os procedimentos também apoiam o sentido de generalização, dado que um procedimento opera em qualquer tartaruga, em qualquer altura e qualquer que seja o estado da tarta-

* Artigo reproduzido da revista *Micromath*; número da Primavera de 1995, vol. 11 (1), com autorização da *Association of Teachers of Mathematics*. Outros artigos sobre o Cabri estão incluídos nesta revista, que existe na biblioteca da Faculdade de Ciências da U. de Lisboa.

ruga, e que existe a possibilidade de utilizar parâmetros para controlar variações no modo de realizar o procedimento. Papert previu que, ao construir procedimentos em Logo, as crianças contactariam com ideias significativas em matemática ou em ciência da computação. O potencial está lá, certamente, mas é necessário mais do que computadores e o programa Logo para educar a consciência crítica das crianças. Requer a consciência que o professor tem do próprio pensamento matemático e da ciência da computação das crianças, e requer confiança para aguentar o esforço suplementar inicial para lidar com os detalhes, de modo a reconhecer os reais desenvolvimentos no pensamento matemático a longo prazo. Existem infelizmente, em competição com isto, demasiados pedidos de atenção e expectativas de sucesso a curto prazo.

O sistema operativo do Macintosh popularizou a ideia da manipulação directa de objectos no ecrã por meio do movimento físico do dedo e do braço através do rato, do *tracker-ball* e agora do *pad*, substituindo o interface formal entre o utilizador e o ecrã, baseado nos comandos de uma linguagem, que é típico do Basic ou do Logo. Enquanto os programas de design e de engenharia têm utilizado a manipulação directa no ecrã desde há algum tempo, o software para matemática foi relativamente lento, até há pouco tempo, a incorporar este tipo de interface físico. Finalmente o Cabri-Géomètre, o Geometer's Sketchpad, o Stella e o Numerator abriram o caminho, o Mathematica possuirá esse tipo de interface na próxima versão e outros sistemas para álgebra e para gráficos de funções seguirão o mesmo trajecto. Mas há ainda muito caminho para percorrer. Novos sistemas para matemática especializada estão a possibilitar aos investigadores apoiar as suas imagens mentais e explorar a manipulação directa no ecrã em arquitectura, engenharia e medicina. Refiro-me a esta tendência porque vejo como através do *Mouse-Plotter* e em particular do Cabri-Géomètre, os alunos na escola podem experimentar novas possibilidades para o pensamento matemático quase em paralelo com os investigadores matemáticos. Está claro que este facto também é fonte de dificuldades.

Separando o Quê, o Porquê e o Como

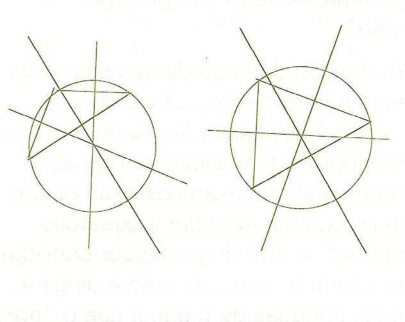
Quando eu estudava matemática na Escola e na Universidade, havia para mim uma fusão (talvez uma confusão) entre:

- o que era verdadeiro matematicamente (definições, teoremas, lemas, etc.);
- porque razão era verdadeiro (as definições pareciam verdadeiras platonicamente, os teoremas e os lemas eram demonstrados à minha frente e por vezes eu até gostava deles);
- como as técnicas eram levadas a cabo e como eram obtidos os resultados.

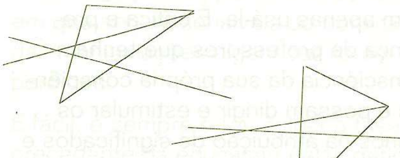
Parece-me que a possibilidade de manipulação directa de objectos no ecrã está a separar estes três aspectos, e penso que o Cabri-Géomètre fornece uma boa ilustração disso.

O Quê

No Cabri pode-se fazer uma construção geométrica e depois arrastar os seus elementos sobre o ecrã. Por exemplo, podemos começar com três pontos e construir a circunferência circunscrita, depois arrastar um dos vértices e ver a circunferência ir atrás.



Ou pode-se desenhar um triângulo, traçar a bissectriz de um dos ângulos internos, a mediatriz do lado oposto e, seja qual for o modo como movermos os vértices dos triângulos, veremos sempre a intersecção da bissectriz e da mediatriz cair fora do triângulo (supor que cai dentro do triângulo permite provar que "todos" os triângulos são isósceles!).



Se se tem atenção ao que fica invariante, quando se movem os elementos da figura sobre o ecrã, rapidamente se chega a várias conjecturas. O Cabri até responde a questões sobre se, por exemplo, três rectas se intersectam sempre num ponto, ou se um ponto construído pertence sempre a uma recta construída. O que quero dizer é que somos conduzidos a fazer conjecturas de que algum facto tem sempre lugar. A utilização do Cabri pode educar (evito utilizar o Papertiano "educará") o aluno no reconhecimento da presença de propriedades geométricas, independentemente de qualquer necessidade de demonstração ou justificação. Ao manipular directamente as figuras com o rato, desenvolve-se uma forte convicção do que é verdadeiro. Prevejo na utilização do Cabri e de outro software de manipulação directa do ecrã um forte apoio a uma intuição matemática muito mais ampla do que é ou virá a ser verdadeiro.

Numa das disciplinas que fiz na Open University (o MT 129) propus que a importância da geometria (de gloriosa memória) na escola residia no facto dos alunos ficarem conscientes de que existem propriedades geométricas, mais do que memorisarem algumas específicas. Mais geralmente, há coisas que são sempre verdade, coisas que podem ser verdade umas vezes e outras não e coisas que nunca podem ser verdade. Aprender geometria era ficar consciente do necessário, do possível e do impossível.

Existe analogia com o papel das calculadoras no acesso aos grandes números e no apoio que dão ao desenvolvimento do sentido de número. Em ambos os casos, tanto nos números como na geometria, não é suficiente ter a tecnologia, nem apenas usá-la. É crítica a presença de professores que tenham consciência da sua própria consciência e possam dirigir e estimular os alunos na atribuição de significados e na sua articulação. A demonstração e a justificação têm sido um pilar das matemáticas no séc. XX. Não estou convencido que continuem a desempenhar para muitos um papel central. Uma das consequências das calculadoras cada vez mais poderosas e dos programas de computador poderá vir a ser uma população mais informada numericamente e visualmente, mesmo se, tal como as gerações que a precederam, não chegar a adquirir os porquês fornecidos pelas demonstrações.

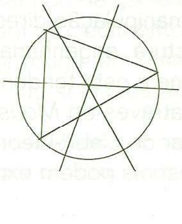
O Como

As explorações sobre como o Cabri pode ser utilizado na sala de aula (descritas no Micromath ou noutros locais) sugerem que existem dificuldades consideráveis na familiarização com as construções do Cabri e com a noção de figura do Cabri, na qual os aspectos com interesse se mantêm, enquanto elementos da figura são arrastados pelo rato ("baralhados", nas palavras de Healy, Hoelzel, Hoyles e Noss no *Micromath* 10.1, p.14-16). O análogo dos procedimentos do Logo são no Cabri as macros, construções que se destinam a obter determinados objectivos. Por exemplo, no Cabri é muitas vezes útil ser capaz de construir a tangente comum a duas circunferências, ou a circunferência inscrita ou circunscrita a um triângulo, ou copiar um ângulo para outro local. Os entusiastas do Logo debateram o problema de saber se deveria ser mostrado aos alunos como utilizar o procedimento ARCO (para traçar um arco de circunferência de determinada amplitude), ou se deveriam primeiro descobrir por eles como se construía uma circunferência. Cada nova versão do Cabri ou do Sketchpad oferece novas e úteis macros através do menu (por exemplo, "compasso", para transferir o comprimento de um segmento de um local para outro), e há muito para discutir sobre a sequência pedagógica até aceder a tais construções. O importante aqui é que, por causa da verdadeira natureza da manipulação dos objectos no ecrã e do desenvolvimento do software, o porquê de uma construção geométrica não é um aspecto muito entusiasmante. Se pretendo fazer qualquer coisa realmente complicada, não quero ser incomodado pelos detalhes (este é também um dos aspectos positivos dos programas de cálculo simbólico). Mas pode ser pedagogicamente necessário ou desejável trabalhar alguns detalhes antes de utilizar um instrumento que faça isso por mim. Esta parece-me ser uma questão que necessita de uma discussão cuidadosa. Não penso que seja necessário cavar um buraco no chão com uma pá antes de utilizar uma pá mecânica; nem praticar a multiplicação com papel e lápis, com grandes números, antes de usar a tecla da multiplicação na calculadora; e não estou sequer convencido que preciso de ser capaz de factorizar uma quadrática antes de utilizar software que o faça por mim. Mas suspeito que para usar um instrumento matemático com eficácia, pode ser necessário gastar algum tempo a examinar o que está por trás dele, como funciona, e mesmo como isso poderia ser feito, em princípio, "à mão".

A atenção dos estudantes na escola está naturalmente voltada para o "como". Precisam de saber como se comportar de maneira a obter as notas que precisam nos exames (ou seja, como responder a questões típicas). A arte do professor consiste em centrar a sua atenção e dirigir as suas energias de modo a que o "porquê" seja também contemplado. No caso do software matemático, têm que aprender como utilizar a ferramenta e como a ferramenta é usada. Evidências de carácter informal sugerem que onde estes dois aspectos estão separados, os alunos deparam-se com grandes dificuldades. Aulas para aprender "que tecla premir, que item do menu usar" são aborrecidas e ineficazes, ao passo que aulas em que os alunos estejam a realizar tarefas que requerem o uso de determinada tecla ou item do menu fornecem um contexto no qual a aprendizagem tem lugar, precisamente porque a atenção global é dirigida para longe daquilo que necessita ser automatizado. (A tese de Dave Hewitt, que lhe pode ser pedida para Birmingham, desenvolve este tema). Além disso basta mostrar a um ou outro dos alunos alguma particularidade, para que o resto da turma a apanhe muito rapidamente.

O Porquê

A geometria costumava ser ensinada, está claro, para treinar os alunos no raciocínio lógico. Os professores julgavam que estavam a ensinar os alunos a demonstrar porque é que certas propriedades geométricas eram verdadeiras. Suspeito, no entanto, que a maior parte dos alunos aprendiam a realizar os passos dedutivos, mas muitas vezes não tinha sentido para eles o que estavam a fazer, nem a generalidade do que estavam a provar. O Cabri fornece uma nova perspectiva, pois substitui a demonstração pela construção. Com o fim de construir uma figura no Cabri, tem-se muitas vezes que conhecer um considerável conjunto de propriedades geométricas e construções. A sequência em que se faz a construção produz uma figura particular, e se mais tarde decidimos que queremos poder variar outro elemento, podemos ter que fazer uma construção inteiramente nova. Por exemplo, em Mason e Nevile (1994), examinámos como construir a circunferência circunscrita a um triângulo e considerámos como



poderíamos construir uma figura no Cabri que permitisse ao utilizador mover dois dos lados do triângulo e o circuncentro, ou o circuncentro, três mediatrizes e o raio.

O diagrama no papel não contém em si tal estrutura, enquanto a figura no Cabri a possui. Isto ilustra uma analogia geométrica com o tema do fazer-desfazer, que é tão central no pensamento algébrico: tomando uma figura no Cabri, reconstruí-la de modo que outros elementos possam ser movidos livremente. Quando se trabalha neste tipo de actividades é muitas vezes um bom auxiliar utilizar a heurística de remover uma restrição e procurar o lugar geométrico dos pontos em que se está interessado. Isto muitas vezes sugere qual a construção a fazer, mas não a razão porque essa construção funciona.

O Cabri não fornece muita ajuda na procura da razão porque certa propriedade é verdadeira, ou porque certa construção funciona. Para procurar porquê, para justificar ou demonstrar geometricamente alguma conjectura, tem muitas vezes que se fazer mais do que rever a sequência da construção, porque é necessário encontrar alguma razão estrutural para que a conjectura se verifique sempre. Por detrás do ecrã do Cabri existe, está claro, uma versão algébrica que o Cabri utiliza para responder a questões gerais de (co)incidência. Se se podem exprimir relações algebricamente, podemos muitas vezes manipulá-las para descobrir o que queremos. Mas a geometria diz respeito a relações, não a valores, e portanto não podemos esperar que um sistema de manipulação geométrica possa gerar demonstrações.

Continuo a prever uma versão do Cabri que dê acesso aquela álgebra (do mesmo modo que o programa Stella dá acesso às equações subjacentes), juntamente com um utilitário para cálculo simbólico que permita ao utilizador empregar também argumentações baseadas em coordenadas cartesianas. Quando isso acontecer, o sonho de Descartes estará verdadeiramente realizado: a geometria sintética ou estrutural dará literalmente a mão à álgebra das coordenadas. Mas, de momento, a separação entre "o quê" e o "porquê" continua a dar-se.

Implicações para a escola

Para a escola, como implicações do software de manipulação directa do ecrã, temos que, tal como nas calculdoras, mas em maior grau, os alunos podem ser atraídos a trabalhar em explorações mais substanciais, com o fim de desenvolverem as suas intuições e a sua consciência dos conteúdos (o "quê") da matemática. Na presença de professores conscientes da sua própria consciência e do seu pensamento matemático, os alunos podem ser atraídos para considerar os porquês, para explorações "por métodos manuais", de modo a poderem apreciar o que é que os instrumentos estão a fazer. Ao serem desafiados e ao mesmo tempo apoiados a articularem os significados e as conjecturas que vão fazendo sobre as "invariâncias no meio das mudanças", é possível que as propriedades matemáticas, as técnicas, as ideias e as heurísticas se tornem não apenas o assunto mas o objecto do estudo. Mas tudo isto se verifica sem a utilização destas ferramentas de computador, da mesma forma! Contudo, a presença dos objectos no ecrã pode ampliar o alcance da mente humana. Acredito que é importante que muitos alunos encontrem os instrumentos utilizados na sua sociedade tão cedo quanto for possível e razoável. Não vejo qualquer razão para que sejam excluídos da utilização de instrumentos que não lhes causam danos físicos (como guiar carros ou utilizar tornos, etc.). Mas há muito que fazer acerca do apoio a dar ao uso dos instrumentos, da apreciação do que é que fazem e da percepção da razão porque funcionam.

Implicações para o Ensino Superior

Existem queixas generalizadas de que os estudantes que entram no Ensino Superior sabem muito menos do que dantes, e mesmo que não mostram qualquer desejo de adquirir os conhecimentos que não possuem. Existe mesmo a preocupação de que pode já ser muito tarde para esses estudantes atingirem a facilidade que as gerações anteriores tinham, porque os períodos em que seriam sensíveis ao domínio das manipulações algébricas foram perdidos.

É fácil, e sempre o foi, culpar a fase precedente da educação pelas deficiências detectadas no "desempenho matemático corrente". Cícero lamentou-se acerca da falta de interesse, aplicação e motivação dos jovens do seu tempo, e este sentimento teve eco em todas as gerações subsequentes. Isto não quer dizer que não existam problemas. Manifestamente existem. Mas só vejo solução num esforço de adaptação. A ardósia, a régua de cálculo, a calculadora, a calculadora gráfica e o computador, cada um diminui a necessidade de fortalecer e empregar certas faculdades humanas (visualização e memória, facilidade de cálculo, lógica e raciocínio, conservação da simplicidade). Por muito que uma pessoa lamente a perda de facilidade que se tinha (e a correspondente perda do prazer de possuir essa facilidade), é necessário recolocar as características essenciais nas práticas correntes.

Acredito que o progresso no software está a tornar ainda mais importante que os professores e alunos, em todos os níveis, alarguem o seu horizonte, afastando-se de um comportamento rotineiro necessário para "responder a questões estereotipadas", de modo a serem capazes de pensar matematicamente, tanto como indivíduos como em grupo. Estou no entanto consciente que existe um contrapoder social que mecaniza tanto quanto possível, com o objectivo de eliminar o elemento humano, de basear tudo no comportamento (prestação de contas, testes de competência, produtos, desempenho, minimização de custos). Suspeito que esta força é a que tem maior influência nas mudanças que os estudantes evidenciam. Acredito que é vantajoso para a socie-

Breves indicações sobre a Internet

1. Equipamento básico

Se tem um computador relativamente actual e um telefone, já tem grande parte do caminho andado para se ligar à Internet. Faltam-lhe duas coisas:

• comprar um modem, ou seja, uma pequena peça de equipamento electrónico que serve para ligar o computador ao telefone (e que já vem com o software correspondente para essa ligação); há modem's piores e melhores, por menos ou por mais dinheiro; mas duas ou três dezenas de contos já chegam para comprar um razoável — escolha um modem que comunique com a máxima rapidez possível, nunca menos de 14.400 bps.

2. Ligação à Internet

Para se poder ligar à Internet, tem que fazer a sua inscrição numa entidade que possa servir de intermediário na sua ligação à Internet. Se está numa Universidade, muito provavelmente ela já está ligada à Internet — informe-se. Se quer ligar-se a partir de casa tem que recorrer a um dos dois fornecedores desse serviço que existem

• a TELEPAC — veja na lista dos telefones ou vá à loja do Forum Picoas em Lisboa;

• o PUUG — que funciona na Universidade de Nova de Lisboa e cujo telefone é (01) 294 28 44.

Tem que pagar a inscrição e a assinatura mensal — informe-se bem sobre os preços, mas com cerca de dois contos iniciais e depois três ou quatro por mês pode estar ligado trinta horas por mês; a isto apenas tem que acrescentar as chamadas telefónicas (locais — Lisboa, Porto e outras cidades — ou inter-urbanas), está claro.

A ligação à Internet que lhe interessa chama-se PPP (*Point to Point Protocol*), pois permite usar um interface gráfico (ver mais à frente) muito fácil nessa ligação.

3. Software

Precisa de três tipos de software:

• software próprio para o seu computador poder fazer essa ligação PPP — este software é fornecido pela TELEPAC (só para MS-DOS) ou pelo PUUG. Se tiver um Macintosh e quiser ligar-se pela TELEPAC — que é mais barato do que o PUUG — contacte a APM;

• software para correio electrónico — um dos melhores é o Eudora, fácil de obter (contacte a APM);

• software para pesquisas na Internet — o melhor é o Netscape (contacte a APM).

Note que depois de estar ligado à Internet todo o software que vai precisando pode ser obtido através da própria Internet, transferindo para o seu computador (chama-se a isto *download*) os ficheiros que quiser.

4. Que fazer com a ligação à Internet?

Apenas dois exemplos, para além do correio electrónico normal:

• Participe no forum electrónico sobre temas de educação matemática, criado pela Secção de Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Esse forum chama-se SEM e para participar nas discussões basta enviar uma mensagem para listserv@cc.fc.ul.pt contendo apenas o seguinte texto

subscribe sem

• Utilizando o programa Netscape, desloque-se pela World Wide Web, visitando locais um pouco ao acaso. Se quiser aceder a um dos melhores, no menu file do Netscape faça

open http://forum.geometry.edu

Espere um pouco e estará num local óptimo para perceber quais são as múltiplas possibilidades que lhe pode dar a Internet.

Eduardo Veloso

Continuação da pág. anterior:

O "quê", o "porquê" e o "como" em matemática

dade como um todo, e em particular para os matemáticos com responsabilidades e interesses na situação do ensino da matemática, que um número cada vez maior de pessoas tenham uma experiência mais ampla relativamente ao "quê" da matemática, com as suas intuições e consciência enriquecida, com base na sua experiência de manipulação de objectos no ecrã. Na medida em que amplia a sua percepção do conteúdo da matemática, a mesma experiência não pode deixar de gerar também interesse no "como" e no "porquê". Suspeito que haverá também progressos que religarão o "quê" e o "porquê", através da utilização de vários níveis de icons, objectos no ecrã e álgebra subjacente. Mas, entretanto, espero ver transformações importantes no modo como as ideias matemáticas são apresentadas e experimentadas pelos alunos. O acompanhamento destes progressos representa por si só, e assim continuará a ser no futuro, um esforço considerável.

Referências

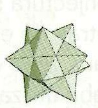
Hewitt, D. (1994). *Economy and Learning Mathematics*. PhD Dissertation, Open University, Milton Keynes, (pedidos ao autor para a Universidade de Birmingham).

Mason, J. & Nevile, L.. (1994). *Diagrams as Functions in Geometry*, in New Directions in Geometry Education, Conference Proceedings, Queensland University of Technology, Brisbane.

John Mason
The Open University

Tradução de E. Veloso. Agradece-se ao colega J. P. da Ponte a revisão da tradução. Os erros que existam são da responsabilidade da redacção.

Materiais para a aula de Matemática



A actividade para utilização do programa Cabri da página seguinte é adaptada da Revista Micromath (Spring 1955, vol 11(1)) e acompanha aí o artigo de Michael de Villiers intitulado *An alternative introduction to proof in dynamic geometry*. Nesse artigo é defendido que a demonstração, face à existência de programas de geometria dinâmica como o Cabri, não tem já tanto um papel de verificação, para dissipar dúvidas sobre uma conjectura, mas sim um papel de tentativa de explicação das razões porque uma dada propriedade geométrica é verdadeira.