

FRACTAIS na Escola Secundária

Daniela Gori Giorgi*

Introdução

Este assunto foi desenvolvido com alunos com idades entre os 16 e os 17 anos.

Na aula, depois de termos sublinhado as diferenças entre figuras da «geometria ordinária» (polígonos, círculos,...) e aquelas, bastante mais complexas, que observamos na natureza, chamámos a atenção dos alunos para uma grande diversidade de formas naturais que parecem repetir o mesmo motivo em diferentes escalas: por exemplo, um fragmento da linha costeira observada de um avião, a diferentes altitudes, os ramos de uma árvore, um floco de neve examinado ao microscópio com diferentes objectivas.

Foi a regularidade do floco de neve que nos ajudou a matematizar as formas naturais. Depois de termos trabalhado a «curva do floco de neve», estudámos outras curvas que se obtêm repetindo a mesma construção; entre elas, a curva de Peano. Assim chegámos ao conceito de dimensão e às curvas fractais. E destas considerações abstractas voltámos a realidade: fenómenos naturais, reproduzidos por simulação, deram uma ideia da investigação actual sobre geometria fractal.

Alguns problemas clássicos a propósito do floco de neve

A construção clássica de um floco de neve é sugerida pelas seguintes figuras:

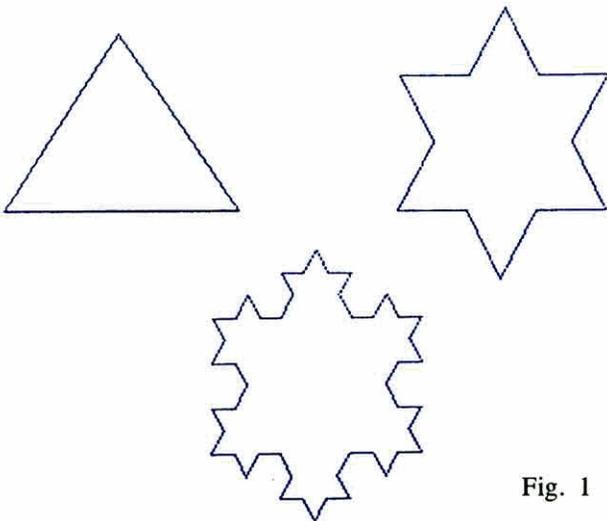


Fig. 1

Parte-se do triângulo equilátero de lado $3a$. No terço médio de cada lado constrói-se um triângulo equilátero de lado a e apaga-se a respectiva base. Continuando este processo obtêm-se polígonos com um número crescente de lados cada vez mais pequenos.

Os valores correspondentes dos lados e perímetros são os seguintes:

Lado	Perímetro
$3a$	$9a$
a	$12a$
$a/3$	$16a$

É evidente que o valor do perímetro tende para infinito.

Calculemos, agora, as sucessivas áreas A_1 , A_2 , A_3 ,...

$$A_1 = 9/4 a^2 \sqrt{3} \approx 3.9 a^2$$

$$A_2 = 3/4 a^2 \sqrt{3} \approx 1.3 a^2$$

$$A_3 = 9/4 a^2 \sqrt{3} \approx 0.6 a^2$$

A soma destas áreas será, então:

$$A = 9/4 a^2 \sqrt{3} + 3/4 a^2 \sqrt{3} + 1/3 a^2 \sqrt{3} + \dots$$

Se excluirmos o primeiro termo, trata-se de um progressão geométrica infinita de razão $4/9$. Assim, a área total é dada por:

$$A = 9/4 a^2 \sqrt{3} + \frac{\frac{3}{4} a^2 \sqrt{3}}{1 - \frac{4}{9}} = 18/5 a^2 \sqrt{3} \approx 6 a^2$$

Isto é, no limite, o lado é zero, o perímetro é infinito e a área é, apenas, um pouco maior do que vez e meia a área A_1 do triângulo inicial!

Estes resultados clássicos acerca do infinito sempre fascinam os estudantes.

Do floco de neve à curva de Peano

Avancemos na nossa investigação. Examinemos, passo a passo, a construção: dividimos um lado em 3 segmen-

tos geometricamente iguais e, eliminando o segmento médio, construímos uma linha poligonal com 4 segmentos de recta.

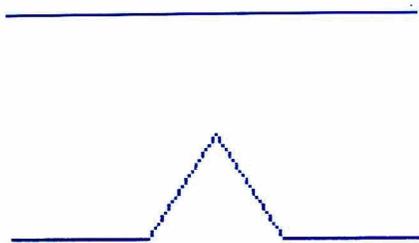


Fig. 2

De seguida, repetimos a mesma operação em cada um destes novos segmentos de recta. Continuando o processo, obtemos poligonais com um número de lados cada vez maior; no limite obtemos uma curva — a **curva do floco de neve**.

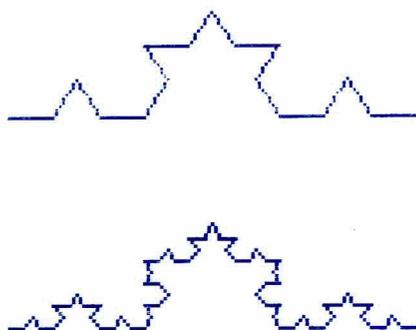


Fig. 3

Surge, então, uma questão: será possível traduzir esta construção por uma fórmula? Haverá alguma relação entre o número de partes em que cada segmento é dividido (3) e o número de segmentos obtidos a partir do segmento inicial (4)?

Antes de respondermos a estas questões, consideremos um outro exemplo: a construção de uma cercadura grega (na sua forma mais simples) a partir de um segmento de recta.

À semelhança do que se fez atrás, dividimos o segmento inicial em 5 partes e eliminamos o segmento médio; de seguida, construímos uma linha poligonal com 9 segmentos, como se vê na figura seguinte.

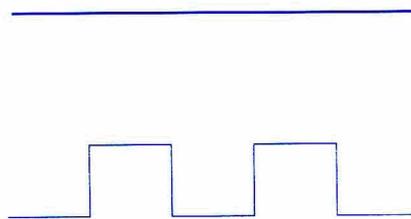


Fig. 4

Haverá agora, uma fórmula que relacione o 5 com o 9?

Consideremos, ainda, um outro exemplo. É possível que, a partir deste, surjam algumas ideias que nos permitam chegar a uma fórmula.

Vamos, então, dividir um segmento de recta em 3 partes e construir uma figura utilizando 9 segmentos. Numeramos esses segmentos de forma a poder-se percorrer a linha poligonal sem descontinuidades.

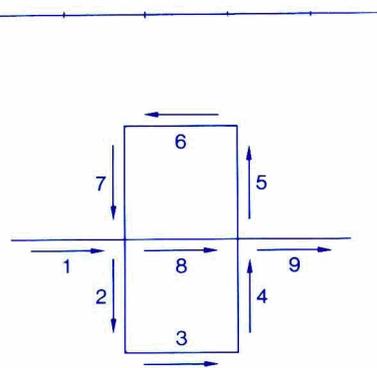


Fig. 5

Repetindo esta operação sobre cada um dos segmentos, obtêm-se as seguintes figuras:

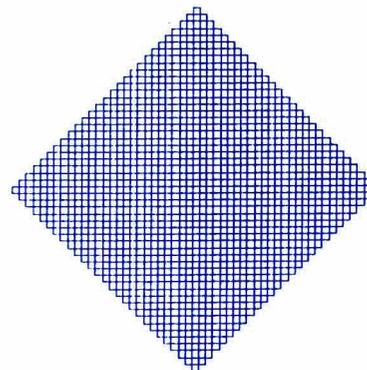


Fig. 6

Continuando este processo a linha poligonal tende para uma curva, a famosa **curva de Peano**. Trata-se de uma curva do tipo «plane-filling», isto é, uma curva que passa, pelo menos uma vez, por todos os pontos de um quadrado. A descoberta desta curva (em 1890) chocou os matemáticos do fim do século passado, conduzindo a uma crise acerca do conceito de dimensão e de curva: de facto, se a dimensão de uma curva é 1 e se a dimensão de uma região plana, como o quadrado, é 2, como explicar o comportamento da curva de Peano?

Tentaremos clarificar esta contradição concluindo, intuitivamente, que a curva de Peano passa por todos os pontos do quadrado.

Voltemos à construção e consideremos as duas figuras seguintes, ambas obtidas a partir da divisão de um segmento de recta em 3 partes iguais.

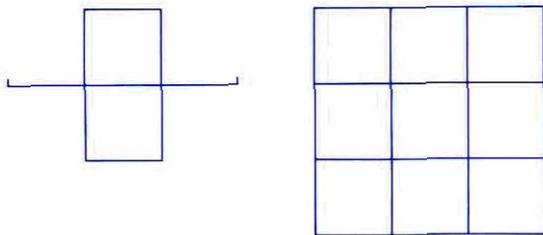
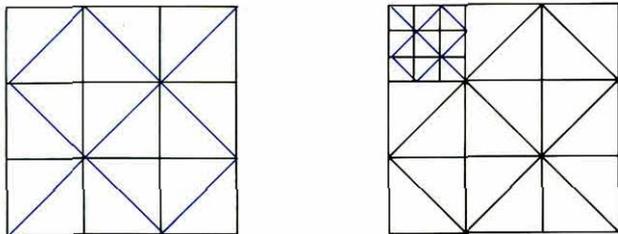


Fig. 7

A primeira é formada por 9 segmentos, a segunda por 9 pequenos quadrados. Pode-se, pois, estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos segmentos e o conjunto dos quadrados. Tal correspondência torna-se evidente se a linha poligonal for desenhada, tal como no trabalho de Peano, a partir de uma das diagonais do quadrado, caso em que a cada quadrado menor corresponde o «seu» segmento-diagonal:



Vê-se, também, claramente que esta correspondência biunívoca entre os lados da poligonal e os pequenos quadrados se mantém válida, quando, por repetição do processo, os segmentos se tornam sucessivamente menores. No limite, isto é, quando a linha poligonal tende para uma curva, quer a diagonal quer o quadrado tendem

ambos para um ponto. Podemos, assim, concluir que a curva passa, pelo menos uma vez, por todos os pontos do quadrado inicial, isto é, preenche o quadrado. Por isso mesmo, somos levados a concluir que a dimensão da curva de Peano é 2, tal como a do quadrado.

Representemos por s o número de partes em que se divide o segmento de recta inicial e por n o número de segmentos da linha poligonal. Teremos, então:

$$s = 3 \quad n = 9 \quad \text{e, portanto,} \quad n = s^2$$

Podemos dizer que o expoente 2 surge pelo facto da dimensão da curva ser 2, tal como descobrimos.

A noção de fractal

Voltando à construção do floco de neve, a situação é a seguinte: o segmento de recta é dividido em 3 partes e a poligonal é formada por 4 segmentos, isto é,

$$s = 3 \quad n = 4$$

Não se pode, agora, escrever $4 = 3^2$ mas, antes,

$$4 = 3^d$$

onde d é a dimensão da curva do floco de neve. É evidente que

$$1 < d < 2$$

e este valor traduz o facto de ser impossível estabelecer uma correspondência biunívoca entre 4 segmentos e 9 quadrados, uma vez que há mais quadrados. Assim sendo, continuando este processo, não é possível preencher o plano. A dimensão da curva é, neste caso

$$d = \log_3 4 \quad \text{ou} \quad d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.3$$

que comparada com a dimensão do quadrado — 2 — está de acordo com o não preenchimento.

No caso da cecadura grega, sendo

$$s = 5 \quad \text{e} \quad n = 9 \quad \text{temos:}$$

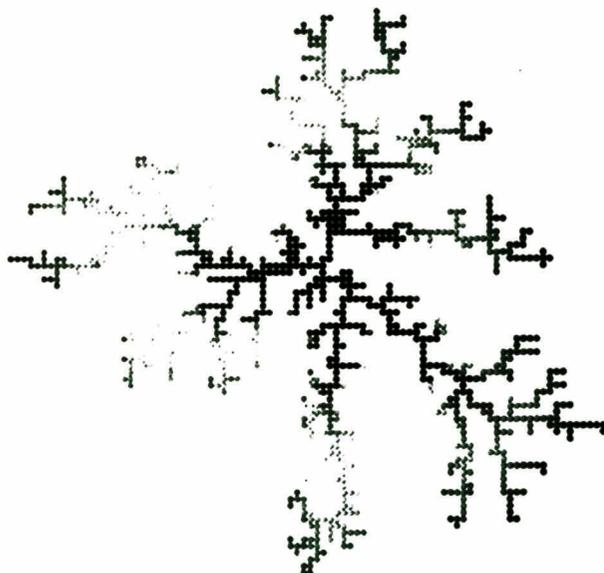
$$9 = 5^d \quad \text{e, portanto,} \quad d = \frac{\log 9}{\log 5} \approx 1.4$$

Também neste caso a dimensão d é um número real entre 1 e 2.

Quando a dimensão de uma curva obtida por repetição de um processo de «dilatação» é, como nestes casos, um número real entre um e dois, a curva não preenche o plano, quer dizer, há espaços vazios. A curva diz-se, então, uma **curva fractal**. A palavra **fractal** foi criada por Benoit Mandelbrot em 1975.

A importância deste tipo de curvas deve-se à sua relação com alguns fenómenos naturais. Com o objectivo de estudar estas relações, têm-se simulado alguns modelos destes fenómenos naturais.

A fotografia 1 mostra um modelo de um agregado aerosol, isto é, de uma suspensão de minúsculas partículas sólidas ou líquidas no ar. O modelo foi construído com base no movimento browniano. A sua estrutura fractal é surpreendente; lembra a forma dos ramos e dos troncos de algumas árvores e, também, a queda de raios durante uma trovoadas.



A fotografia 2 reproduz as linhas de ruptura num vidro inquebrável.

É fácil imaginar a importância que a previsão destas linhas poderá ter na manufactura do vidro.

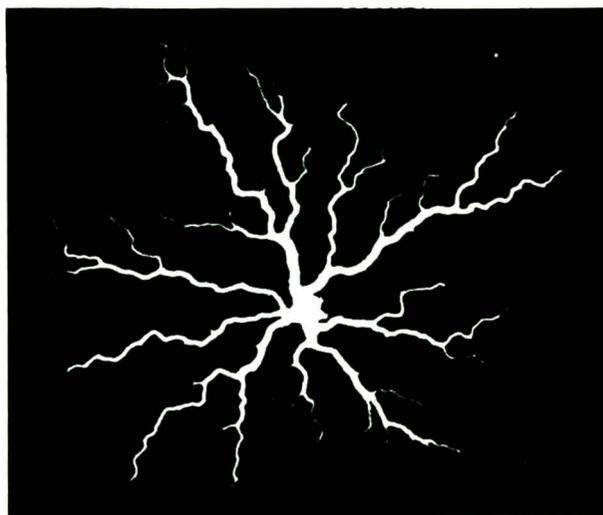
Outra possível aplicação da geometria fractal é na modelização duma massa de nuvens com base em observações feitas por radar ou satélites e na investigação da forma como tendem a difundir-se. No dia em que estes estudos estiverem suficientemente avançados haverá uma verdadeira revolução na previsão do tempo.

É interessante pensar quão viva (natural) pode ser uma simulação obtida por meio da geometria fractal; na verdade, ninguém suspeitará que as paisagens reproduzidas em filmes como a Guerra das Estrelas são «artificiais»!

Como viram, os estudantes debruçaram-se sobre alguns aspectos da investigação mais actual. Para além disso, várias circunstâncias levaram os estudantes a pensar em conceitos matemáticos importantes como o conceito de limite ou o conceito abstracto de dimensão. Também as «habituais matemáticas escolares», como logaritmos e progressões, apareceram e tornaram-se importantes e com significado.

Percebe-se facilmente que este estudo possa ter fascinado mesmo os estudantes com reticências relativa-

mente à Matemática. E foi por isso mesmo que pensamos apresentar este trabalho aos nossos colegas portugueses.



Bibliografia

- Daccord, G. e Lenormand, R. (1987). Du pétrole, du plâtre et des fractals. *La Recherche* (Março).
- Dewdney, A. K. (1985). A computer microscope zooms in for a look at the most complex object in mathematics. *Scientific American* (Agosto).
- Jullien, R., Botet, R. e Kolb, M. (1985). Les agrégats. *La Recherche* (Novembro).
- Kahane, J. P. (1984). *Mesures et dimensions*. In Proceedings of ICMI 5.º Adelaide.
- Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.
- Mandelbrot, B. (1983). *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman New York.
- Noss, R. (1985). Fractals, turtles and snowflakes. *Micromath* (Spring).
- Pertegen, H. O. (1985). *The beauty of fractals*. Springer Berlino.
- Sawada, Y. e Honjo, H. (1986). D'ou vient la forme des dendrites? *La Recherche* (Abril).
- Tahta, D. (1985). Frontiers of chaos exhibition. *Mathematics Teaching* (Dezembro).

* Daniela Gori Giorgi é professora de Matemática e Física do Liceo Scientifico de Roma. Tem apresentado trabalhos em encontros internacionais, sendo, aliás, membro da CIEAEM (Comission Internationale pour l'étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathematiques).

O artigo que aqui se publica e que constituiu parte da sua comunicação no Prof Mat 87 é o resultado de um trabalho realizado com Emma Castelnuovo e Claudio Gori Giorgi com quem, também, é co-autora de uma colecção de livros, «La Scienza», de que estão publicados quatro volumes:

- 1.º Il Cammino della Matematica (I)
- 2.º Il Cammino della Matematica (II)
- 3.º La Matematica nella realtà
- 4.º Trigonometria.

A tradução do artigo é da responsabilidade de Leonor Moreira.