Para este número seleccionámos

Simon Stevin e as fracções decimais*

Dirk Jan Struik

Enquanto nos parece natural que conceitos como o de função ou de limite tenham levado centenas de anos a consolidar-se, pode surpreender que o mesmo se tenha passado com a notação "óbvia" utilizada para os números decimais. Mas é isso que o artigo de Dirk Struik de 1959, escrito para a revista Mathematics Teacher *do NCTM, nos mostra de modo exemplar, ao descrever a lenta evolução que começa nos últimos séculos da Idade Média, com a introdução da numeração indo-árabe, e vem até à notação moderna usada nas tabelas de logaritmos de Briggs do século XVII. A escolha do autor do texto que seleccionámos para este número também se justifica pelo facto de Dirk Struik ter festejado em 1994, ainda com vida, o seu centenário (ver artigo de Maria João Lagarto na página 31)*

1

Simon Stevin, engenheiro e matemático de origem flamenga, é conhecido na história da matemática como o inventor das fracções decimais. Isto é substancialmente verdade, mesmo tendo em conta o facto de que as fracções decimais eram usadas antes de Stevin.

Foi basicamente através do pequeno livro de Stevin, na realidade não mais do que um panfleto, intitulado *De Thiende* (O Décimo), publicado em Leiden em 1585, que as fracções decimais se tornaram parte integrante dos currículos de aritmética.

Este panfleto foi reeditado, em holandês, francês, inglês e latim, várias vezes durante a vida de Stevin e logo após a sua morte. O seu texto ficou agora disponível numa reprodução facsmile, conjuntamente com uma tradução inglesa actual de Richard Norton, como parte do 2º volume da última edição dos trabalhos principais de Stevin, preparada sob os auspícios da Secção de Física da Real Academia de Ciências holandesa[1]. Esta edição contém uma introdução dedicada à história das fracções decimais que nos dá oportunidade de avaliar as descobertas de Stevin nesta área.

Simon Stevin era natural de Bruges; é praticamente certo que 1548 foi o ano do seu nascimento. Iniciou a sua vida como contabilista, mas deixou a Flandres durante o período de instabilidade e perseguição que antecedeu a guerra com Espanha.

Em 1581 encontramo-lo em Leiden, e desde essa época até à sua morte viveu na Holanda. Aqui, como milhares de outros emigrantes do sul dos Países Baixos, teve de encontrar uma nova forma de vida. Com o seu talento especial como engenheiro, contabilista e matemático, a sua boa aceitação na nova república estava assegurada. Durante muitos anos foi conselheiro do Príncipe Maurice de Orange, um dos mais afamados comandantes militares da sua época, que serviu não só como engenheiro militar, mas também como tutor em diferentes campos da matemática. Muitos dos últimos trabalhos de Stevin têm a marca desta sua actividade que abrangia amplos aspectos da geometria prática e aplicada, da trigonometria, da perspectiva e da contabilidade. Depois da sua morte, em Haia, em 1620, o seu admirador Albert Gerard, também um imigrante matemático e engenheiro, editou em francês uma colectânea dos seus trabalhos de matemática[2]. Esta edição foi publicada como um enorme volume em 1634, e tem sido a principal fonte do nosso conhecimento sobre Stevin como matemático, até 1958[3]. A nova edição de *The Principal Works* está planeada em cinco volumes, tendo já sido publicados o Volume I, sobre Mecânica, e o Volume II sobre Matemática. Quando os cinco volumes estiverem publicados, oferecerão uma visão excelente sobre o estatuto das ciências exactas na Europa no período imediatamente anterior a Fermat e Descartes iniciarem a nova época do cálculo e da geometria das coordenadas.

Uma fracção decimal tem no seu denominador uma potência de dez inteira e positiva, e pode ser escrita

* Artigo reproduzido com autorização da revista *Mathematics Teacher* 52 (Outubro, 1959): 474-78, copyright (1959) do *National Council of Teachers of Mathematics*. Este artigo está incluído no livro *Five fingers to infinity*, de Frank Swetz, ed. The Open Court (1994).

de muitas formas, por exemplo: 71/100, 0.71, 0,71 ou .71, nas notações actuais. Não é fácil dizer quando foram usadas sistematicamente as fracções decimais, mas os pioneiros parecem ter sido os chineses[4]. Com eles encontramos a notação do valor posicional decimal já no século XIV a. C. e o uso de fracções decimais nas medições no século III d. C.. Liu Hui, que viveu neste período, exprimiu o comprimento de 1,355 pés como sendo 1 chhih, 3 tshun, 5 fen, 5 li.

O mesmo Liu Hui também efectuou extracções de raízes em decimais; neste processo, que encontramos na Idade Média entre autores árabes, judeus e de origem latina, escreve-se, por exemplo, .

$$\sqrt{17} = \sqrt{170\ 000}/100 = 412/100$$

Quando se chega à dinastia Sung, encontra-se o cálculo com fracções decimais já desenvolvido; Yang Hui, em 1261, multiplica 24,68 por 36,56 e encontra 902,3008. Vinda da China e da Índia, a notação decimal chegou aos autores árabes; o nosso exemplo de $\sqrt{17}$ encontra-se nos escritos de Al-Nasawi (Persa, cerca de 1030), que traduziu de novo 412/100 em fracções sexagesimais como 4°7'12", significando 4+7/60+12/3600.

A familiaridade de Yang Hui com as fracções decimais foi partilhada, século e meio mais tarde, pelo astrónomo persa Jamshid Al-Kashi[5], que multiplicou 25,07 por 14,3 obtendo 358,501. É difícil dizer se a primeira noção de fracção decimal na Europa apareceu através do contacto com o Oriente ou se surgiu espontaneamente, mas subsistem poucas dúvidas de que onde quer que fossem usados cálculos em larga escala, no sistema decimal, as fracções decimais estavam, mais tarde ou mais cedo, destinadas a aparecer através da própria lógica dos cálculos. Sendo assim, é bastante estranho que estando o sistema decimal em uso desde a Idade da Pedra, em tantas zonas do mundo, o uso regular deste sistema para as fracções só tenha aparecido mais tarde.

Os leitores podem perguntar: Se as fracções decimais apareceram fora da China numa data tão tardia, como se desembaraçavam as pessoas antes da sua introdução?

A resposta é que usavam fracções como 3/7, 7/13, etc. com qualquer tipo de denominador, ou as fracções sexagesimais baseadas no número 60. Um exemplo duma utilização bastante complicada do primeiro tipo é a aproximação de π dada por Arquimedes, como um valor entre 3 10/71 e 3 1/7; exemplos da utilização de fracções sexagesimais podem ser encontrados em tábuas de barro cuneiformes do Iraque (Mesopotâmia) do 4º milénio a.C.. Ptolomeu, no seu livro de astronomia conhecido como o *Almagest* (cerca de 150 d. C.), também usou fracções sexagesimais. E também nós o fazemos quando exprimimos a medida de um ângulo como 29°51'32"; aqui os minutos e segundos estão expressos no sistema sexagesimal, enquanto os números 29, 51, 32 estão escritos no sistema decimal. Sabe-se que existiram variações destes dois métodos de cálculo com fracções, tais como o método egípcio de exprimir fracções como a soma de fracções unitárias (fracções como 1/3, 1/7, com numerador 1).

Na realidade, havia e ainda há outro modo de lidar com o problema, muito utilizado sempre que o cálculo fraccionário é considerado difícil, e que consiste em evitar todas as fracções pela escolha de uma escala de medida apropriada, por exemplo 60, de modo que 1/4 é expresso por 15, 2/5 por 24, etc. Nós fazemos o mesmo quando dizemos 475 m em vez de 0,475 km, ou 3 quartas em vez de 3/4 do galão. Veremos como todos estes conceitos tiveram um determinado papel no trabalho de Stevin.

2

Durante os séculos quinze e dezasseis, começou a usar-se na Europa o sistema árabe de notação decimal — isto é, o nosso actual sistema posicional — com cada vez maior eficiência, em consequência sobretudo da expansão de uma sociedade mercantilista. Gradualmente, a influência do sistema começou também a fazer-se sentir no cálculo com fracções.

Podemos observar claramente este processo nas tabelas trigonométricas de Regiomontanus, o astrónomo e matemático de Nuremberg, que morreu em 1476 e cujos livros e tabelas eram ainda o padrão seguido na época de Stevin. Nessa altura, e também mais tarde até ao século dezoito, os senos, bem como as tangentes e outras entidades trigonométricas, eram encaradas como linhas e não como razões, de forma que eram expressas em termos de um raio R de um círculo, de comprimento dado. Na tabela de senos de Regiomontanus encontramos R=60 000, e portanto o seno de 30° é 30 000; mais tarde ele usou R=6 000 000. Ambos estes valores mostram a influência do sistema sexagesimal (as tábuas de Ptolomeu baseiam-se em R=60). Os diferentes senos são assim expressos por inteiros. Mas Regiomontanus também tinha uma tabela de tangentes na qual a tangente de 45° é 100 000, sendo neste caso, $R= 10^5$, existindo outra tabela com $R=10^7$. O sistema decimal tornou-se assim a base para os cálculos das tabelas trigonométricas. As enormes tabelas de Rhaeticus (1551), as quais contêm com 7 casas decimais os valores de todas as seis funções trigonométricas para ângulos com intervalos de 10", são baseadas em $R=10^7$.[6]

Estas tabelas não contêm fracções decimais no sentido estrito do termo. Verdadeiras fracções com potências de 10 como denominadores ocorrem em alguns dos muitos livros de aritmética surgidos durante o século dezasseis. Por exemplo, encontramos num livro de 1530 escrito pelo muito conhecido professor alemão de aritmética, Christopher Rudolff, uma tabela de juros compostos, na qual os valores de $375x(1+5/100)^n$ para n=1,2,...,10, são escritos numa forma que difere da nossa notação actual apenas no uso de um traço vertical em vez de um ponto como separador decimal — por exemplo, 413|4375 para n=2.[7] Há muitos casos semelhantes, mas nenhum desses autores usava as fracções decimais de uma forma consistente, e quando as usavam as notações eram muito variadas.

Stevin foi o primeiro no Ocidente a retirar às fracções decimais o seu carácter ocasional. Apelando tanto ao letrado como ao homem prático, tanto ao professor como ao mercador e ao medidor de vinho em barris, anunciou as vantagens da sua notação como "ensinando como efectuar com facilidade todos os cálculos necessários aos homens através de inteiros, sem fracção". Ao fazê-lo usava uma notação que lembra bastante a sexagesimal; onde nós escrevemos 47,58, ele escrevia 47⓪ 5 ① 8 ② ,.onde a unidade ⓪ é denominada "começo", a décima ① é chamada "primeiro", a centésima ② é chamada "segundo", etc. Quando nós escrevemos 27,847+37,675+875,782=941,304, Stevin escrevia:

```
   ⓪①②③
  27847
  37675
 875782
 ------
 941304
```

De forma semelhante trata da subtracção, da multiplicação e da divisão — todas efectuadas "sem fracção". Termina o seu panfleto defendendo a introdução do sistema decimal também nas medidas de comprimento, área, volume, etc.

Stevin tinha a ideia correcta, mas a sua notação parece-nos desajeitada e menos elegante do que a utilizada por Rudolff meio século antes. A notação com o círculo foi obtida a partir do matemático italiano Bombelli, que tinha usado uma notação semelhante, na sua Álgebra de 1572, para as potências da variável (antecipando os nossos expoentes em x^1, x^2, x^3, etc.). Pode ser que tenha usado a notação sexagesimal na forma 47°5'8", para escrever o que actualmente é 47,58, tal como alguns dos seus seguidores fizeram; ele próprio mudou ocasionalmente a sua notação, escrevendo 732② para o nosso 7,32. A sua notação pode ter tido algumas vantagens para alunos inexperientes, já que permite passos intermédios: 7⓪5①8② mais 4⓪ 7 ① 5 ② é igual a 11 ⑩ 12 ① 13 ②, o que se reduz a 11 ⓪ 13 ① 3 ②, e de novo a 12 ⓪ 3 ① 3 ② Stevin conseguia também trabalhar com zeros: 2 ③ 7 ⑤ significa 0,00207. Mas a notação manteve-se pouco utilizada e o trabalho de Stevin não teria tido uma influência perduradora se não fosse Napier e os seus logaritmos.

3

Os logaritmos inventados pelo fidalgo escocês, John Napier, foram pela primeira vez apresentados em latim no seu *Descriptio* de 1614. Esses primeiros logaritmos não são aqueles que nós usamos, mas sim determinados números definidos com a ajuda de senos, que na explicação de Napier se baseavam em $R=10^7$. A edição de 1614 não tinha fracções decimais. Estas apareceram numa tradução inglesa de 1616 do *Descriptio*, com um ponto como separador decimal. Esta notação foi adoptada por Napier no seu Rabdologia de 1617, em latim, o livro no qual ele mostrou como efectuar cálculos com as suas barras, as chamadas "barras de Napier". Aqui Napier cita a *Arithmetica Decimalis* de Stevin e propõe a notação de 1993,273 (com ponto ou vírgula) para 1993 273/1000, embora também use 821,2'5" para 821 25/100. Depois, no trabalho póstumo *Constructio* de 1619, a notação tornou-se consistente: "o que quer que seja escrito depois da vírgula é uma fracção". Assim 25,803 significa 25 803/1000.

As grandes tábuas de logaritmos de base 10, que aparecem actualmente, assumem inteiramente a notação decimal de fracções, com ponto ou vírgula. Com tais tabelas, nas quais as partes decimais de números como 43, 430, 4300 são as mesmas, a notação decimal de fracções é simplesmente natural. Henry Briggs, na sua tabela de 1624, e Adrian Vlacq, nas suas tabelas de 1627, utilizaram coerentemente esta notação, e a partir deles as fracções decimais, com ponto ou vírgula como separador, passaram a ser aceites em geral, nomeadamente em cálculos com logaritmos.

As contribuições de Stevin, Napier e Briggs foram reunidas em dois livros alemães do agrimensor Ezechiel De Decker, intitulado *The New Arithmetic, First Part and Second Part*[8] (A Nova Aritmética, Primeira Parte e Segunda Parte) (1626, 1627). Aqui estão juntos *The Thiende* de Stevin, a tradução de Vlacq da Rabdologia e os logaritmos de Briggs de todos os inteiros de 1 a 100 000. Esses dois livros de De Decker são uma espécie de glorificação do triunfo do sistema decimal. Eles acentuam três aspectos essenciais desta vitória: a notação indo-árabe com os dígitos modernos, as fracções decimais, e os logaritmos da base 10. Uma alteração era ainda necessária, embora estivesse já implícita em toda a estrutura do sistema, nomeadamente a reconversão das tabelas trigonométricas para a unidade R=1, algo que mesmo Stevin não fez. A introdução sistemática desta unidade R=1 teve que esperar até ao *Introductio in Analysin Infinitorum* de Leonard Euler de 1748, e a partir dessa época as entidades trigonométricas nunca mais foram consideradas como segmentos de recta mas como razões sem dimensão.

4

O triunfo das fracções decimais nos trabalhos de Stevin e Napier não quer dizer que a notação e o uso se tornassem imediatamente numa norma. Existiam seguidores leais de Stevin que preferiam a sua notação, ou uma ligeira modificação dela.

Ainda em 1739 encontramos o Abade Dudier a ensinar que as fracções decimais devem ser escritas como

$89.5^{I}2^{II}7^{III}6^{V}$ ou 895276^{IV}; ele usava, no entanto, a notação habitual do ponto para os logaritmos. Muitas destas incoerências mantiveram-se de novo até Euler que, na sua *Introductio* de 1748 uniformizou as nossas notações actuais.

O uso da notação decimal para pesos e medidas, também proposto por Stevin, teve que esperar, no Ocidente, até à Revolução Francesa, que introduziu metros, ares e litros, e que também uniformizou o sistema monetário[9]. Sabemos que isto só foi parcialmente aceite na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos, embora os Estados Unidos introduzissem um sistema monetário decimal como resultado dos esforços de Robert Morris, Thomas Jefferson, e Alexander Hamilton[10]. Relativamente às medidas angulares, a luta continua, e quando utilizamos a nossa notação habitual de graus, minutos e segundos, prestamos a nossa homenagem a um sistema que se pode orgulhar de uma idade de cinco mil anos, certamente uma das mais longas idades de toda a nossa herança científica.

Notas:

1. *The Principal Works of Simon Stevin*, Amsterdam: Swets and Zeitlinger. Vol. I, *Mechanics*, editado por E. J. Dyksterhuis, v + 617 pp. (1955); Vol. II, *Mathematics*, editado por D. J. Struik, em duas partes, v + 976 pp. (1958).

2. Albert Girard (1595-1632) é principalmente conhecido como o autor de *Invention nouvelle en algèbre* (1629, reeditado em 1884), no qual se encontra o teorema de que uma equação algébrica de grau n tem n raízes (a formulação de Girard é diferente).

3. Houve duas edições facsimile de *De Tiende* antes de 1958, uma por H. Bosmans da edição holandesa de 1585 (Haia: Anvers 1924) e uma por G. Sarton da edição francesa de 1585 (*Isis* 33 (1935)).

4. J. Needham, *Science and Civilisation in China*, vol. III. Cambridge: Cambridge University Press, 1959. A primeira secção deste trabalho standard trata de matemática.

5. *D. G. Al-Kashi Kljui Ariſmetiki, Traktat ob Okruznosti*, traduzido e editado por B. A. Rozenfel'd (Moscovo, 1956), ver em particular p. 62; Y. Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan* (Leipzig, 1913); ver em particular p. 26. A forma como Al-Kashi multiplica 25,07 por 14,3 para obter 358,501pode ser vista na figura 1.

6. Estas tabelas foram ampliadas por Valentin Otho no *Opus Palatinum* de 1596, uma tabela clássica que tem muitos valores com dez casas decimais e os senos com 15.

7. *Exempel Buechlin Rechnung belangend darbey* (Augsbury, 1530). O local onda as fracções decimais são introduzidas tem sido reproduzido frequentemente, por exemplo em D. E. Smith, *History of Mathematics*, Vol II, p. 241.

8. *Eerste Deel van de Nieuwe Telkonst* (Gouda, 1626); *Tweedle Deel van de Nieuwe Telkonst* (Gouda, 1627). A segunda parte já era conhecida, mas a primeira parte desapareceu até que foi redescoberta por M. van Haaften em 1920; ver *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 15 (1928), pp. 49-54; 31 (1942), 59-64. Esta descoberta mostrou que não foi Vlacq em 1628, mas De Decker em 1627 que primeiro publicou uma tabela de logaritmos completa.

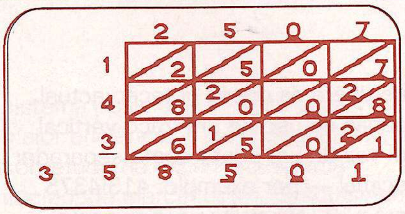


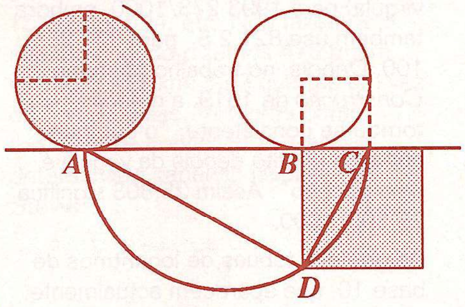
fig. 1. Multiplicação de 25,07 por 14,3 na forma utilizada pelo matemático árabe Al-Kashi. Na versão original, os inteiros estão a preto e as partes fraccionárias a vermelho. Os dígitos são árabes, os quais diferem dos nossos dígitos actuais, já que estes só se utilizam desde o Renascimento.

9. Os chineses, como se menciona no texto, tinham um sistema decimal desde, pelo menos, o séc. III d. C.

10. O dólar, com as suas divisões decimais foi introduzido pelo *Coinage Act* de 1792, patrocinado por Hamilton. Este decreto foi precedido por uma resolução do Congresso em 1785, resultado de um relatório de Robert Morris para o presidente do Congresso (1782), apoiado por Jefferson. Ver A. Nussbaum, *The History of the Dollar* (New York, 1957, viii + 308 pp.), capítulo II; C. D. Hellman, "Jefferson's efforts towards the decimalization of the U.S. weights and measures", *Isis*, 16 (1931), pp. 266-314.

Tradução de Isabel Cristina Dias
Escola Secundária de Santo António dos Cavaleiros

Quadratura do círculo: uma solução não ortodoxa
(complemento ao artigo da pág. 25)



AB, sendo igual a metade do perímetro da circunferência, é igual a πr. Por sua vez, ***BD***, lado do quadrado, é a altura do triângulo rectângulo [***ABD***], e portanto meia proporcional entre ***AB*** e ***BC*** = ***r***. Portanto a área do quadrado é $\pi r.r = \pi r^2$