

A generalização dos novos currículos de matemática do ensino secundário, no ano lectivo 1993/94, surgiu-nos como um desafio à nossa prática pedagógica. Sentimos que a melhor forma de o enfrentarmos era trabalhar em conjunto. Os novos programas constituíram o pretexto e a necessidade para iniciarmos um trabalho de equipa de forma regular.

As aplicações da matemática são um dos aspectos contemplados nas novas orientações curriculares e constituem um vector da matemática e do seu ensino/aprendizagem que nos é muito querido.

Para nós, e tal como afirma Ponte (1992), saber matemática não significa forçosamente ter facilidade em aplicar a situações da vida real ou mesmo a situações de outras disciplinas escolares.

O mundo de hoje está matematizado (Davis, 1988), havendo toda uma utilização de ideias e construções matemáticas, quer na sua forma teórica quer em manifestações em computador, para organizar, para descrever, para regular e para fomentar as nossas actividades humanas.

A própria compreensão do "mundo real", como afirma Burghes e outros (1988), tem sido feita através da

transferência dos seus problemas para um meio no qual eles possam ser estudados mais convenientemente — o mundo matemático. Esta interacção provoca criação de matemática e transforma as nossas percepções do mundo exterior que, por sua vez, criam novas interacções.

Propostas de tarefas apresentadas aos alunos baseadas em exemplos da vida real são um aspecto importante da nossa prática docente, embora não as consideremos como a condição necessária para uma boa motivação e aprendizagem. Muitas vezes é mais útil apresentar exemplos dentro da matemática que exemplos reais (por vezes autênticos exemplos "reais forçados") que nada dizem aos alunos. Existem propostas do fôro da matemática pura que têm explorações bastante ricas e são desafiadoras e estimulantes para os alunos. Estes aspectos são, quanto a nós, os mais importantes, e dos quais procuramos que se revistam as nossas propostas, quer estas envolvam ou não aplicações.

Porém, uma coisa é criar uma proposta que lida apenas com conceitos matemáticos, outra coisa é criar uma onde há intervenção de conceitos de outras disciplinas ou áreas do conhecimento que nos devem merecer muita atenção. Neste último caso, há que ter o cuidado de os tratar correctamente e perto da forma como são tratados nas respectivas áreas, para não criar contradições nos alunos. No entanto, a realidade das escolas é a de que os professores desconhecem o que se passa nas outras disciplinas, muito em particular a abordagem de conceitos comuns. Por sua vez, o trabalho interdisciplinar não é frequen-

## Oscilações de duas propostas no

*António Bernardes, Manuel*

te, embora se revele de grande necessidade e utilidade. Será que este diálogo vai abrir-se com a área escola?

A actividade que os alunos desenvolvem em torno de propostas que lidam com contextos reais contribui, quanto a nós, para que eles adquiram quer ideias e conhecimentos matemáticos quer uma melhor compreensão do mundo que os rodeia.

### Como surgiram e foram elaboradas as duas propostas

A entrada no capítulo dos reais foi feita com alguma descontração. Sentimos que íamos tratar assuntos onde nos sentiríamos à vontade e onde pensávamos ser fácil fazer aulas inovadoras.

Neste tema valorizámos bastante a evolução histórica do conceito de número e a resolução de problemas envolvendo várias formas de representação dos reais. Neste último caso, nomeadamente sobre potências e radicais, o contexto das propostas foi predominantemente numérico e geométrico.

Mas, à medida que íamos avançando, também iam crescendo algumas dúvidas. Qual o nível de profundidade no tratamento de certos assuntos? Até onde ir no desenvolvimento (mecanização) de certas técnicas de cálculo, em particular nas potências e radicais?

As poucas tentativas de insistência em exercícios de cálculo foram muito pouco proveitosas. Quando fizemos um balanço daquele capítulo ficámos convictos de que o ensino de certas regras de cálculo pode partir da resolução de problemas (e nós até

# um pêndulo: capítulo dos reais

Saraiva, Teresa Colaço

tentámos enveredar por aí), não fazendo muito sentido a insistência na resolução de exercícios de mecanização pura e simples. A aplicação dessas regras poderia ser capitalizada mais tarde, no estudo das funções. Estamos, este ano, a ter a confirmação daquela convicção.

Após o tratamento das relações de ordem e as respectivas propriedades, que foram dadas numa base puramente matemática (contextos numéricos ou geométricos — perímetros, áreas e volumes), resolvemos elaborar uma proposta que abordasse de uma forma global o enquadramento de expressões com uma variável e envolvesse a aplicação das propriedades já estudadas. Pensámos também que essa proposta poderia ter como pano de fundo uma situação exterior à matemática.

Como os alunos eram do agrupamento 1 e tinham a disciplina de física no currículo pensámos em criar uma proposta que tivesse como base um modelo daquela área.

Começámos então as conversas com os professores de física. Estas foram no sentido de arranjar modelos físicos a partir dos quais pudéssemos abordar temas do programa de matemática, nomeadamente os enquadramentos. Na escolha desses modelos havia a preocupação de que fossem do conhecimento dos alunos ou que a sua compreensão não constituísse um obstáculo à abordagem dos conceitos matemáticos. Também nós, professores, tínhamos a preocupação de encontrar uma situação em que nos sentíssemos à vontade na discussão dos conceitos físicos.

Acabámos por optar por utilizar o

modelo que relaciona o período de oscilação de um pêndulo com o comprimento do pêndulo e a aceleração da gravidade, e que é traduzido pela equação

em que  $T$  representa o período de oscilação (em segundos),  $L$  o comprimento do fio (em cm) e  $g$  a aceleração da gravidade (em  $\text{cm/s}^2$ ). A expressão contém as leis do pêndulo estabelecidas por Galileu:

- 1ª Lei — O período é independente da massa e da natureza do corpo oscilante.
- 2ª Lei — As pequenas oscilações são isócronas, isto é, têm a mesma duração.
- 3ª Lei — O período é directamente proporcional à raiz quadrada do comprimento no mesmo local.

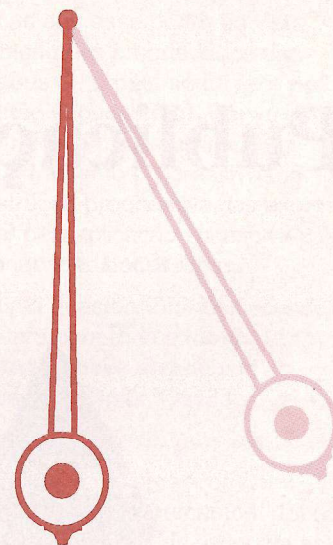
Sob o ponto de vista físico, fixar  $g$  e analisar a relação entre  $L$  e  $T$  não é uma situação prática muito rica. Sob o ponto de vista matemático temos um

modelo do tipo  $y = k\sqrt{x}$ .

Contudo, a situação de fixar  $L$  e ver a relação entre  $g$  e  $T$ , tem uma aplicação prática imediata, que é a de permitir o cálculo da aceleração da gravidade a partir da medição de  $T$ . Traduz-se à superfície terrestre na variação da aceleração da gravidade dos pólos para o equador, maior nos pólos porque mais próximo do centro da Terra. Sabe-se que o valor de  $g$  varia aproximadamente entre 9,78 e 9,84  $\text{m/s}^2$ .

Sob o ponto de vista matemático, para estudarmos tal variação podemos isolar  $g$ , obtendo

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$



Temos assim um modelo do tipo

$$y = \frac{k}{x^2}$$

Note-se que a equação

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

é apenas válida para pequenos ângulos de oscilação, de modo que seja válido. Para ângulos que não verifiquem esta condição mostra-se que o período pode desenvolver-se numa série de potências

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left( 1 + \frac{1}{2^2} \text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3}{4^2} \text{sen}^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots \right)$$

em que  $\theta_0$  é o deslocamento angular máximo.

Assim, elaborámos as diversas questões da proposta procurando nunca perder de vista a discussão ao nível da física.

No âmbito da matemática, apontámos no sentido:

- da exploração do conceito de variável,

- da manipulação de equações com várias variáveis (questões 1, 2 e 3 da ficha 1)',
- do reconhecimento das relações funcionais entre as diversas variáveis (questão 3),
- da interpretação gráfica da situação (questão 4),
- da aplicação das propriedades das relações de ordem (questão 5a),
- da abordagem intuitiva do conceito de limite (questão 5b).

Na fase de elaboração verificámos imediatamente que não poderíamos abordar algumas questões matemáticas que considerávamos importantes sem cair no ridículo de uma situação sem sentido físico. Por exemplo, não teria sentido explorar a variação de  $T$  em função de  $L$ , quando  $L$  toma valores muito pequenos (próximos de 0) ou muito grandes. Aliás, esta última situação só poderia ser posta se imaginássemos um pêndulo com um comprimento muito grande, "pendurado de uma nuvem, talvez seguro pelo Santo António".

Era pois necessário dar o salto do contexto físico para um contexto puramente matemático. Surge assim a proposta "Expressões com variáveis e enquadramentos" (ficha 2). Nesta, para além dum aprofundamento e consolidação das questões matemáticas atrás referidas, introduziram-se questões (2b) em que os alunos teriam que lidar com números reais na forma de potências e descobrir leis de formação. Nesta ficha de trabalho, as perguntas centraram-se na utilização da equação

$$a = \pi \sqrt{\frac{z}{s}}$$

semelhante à do pêndulo, mas em que foi valorizada a relação entre  $a$  e  $z$ , menos explorada na outra ficha.

### Como correram as aulas

A proposta "As oscilações de um pêndulo" foi apresentada numa aula de duas horas, realizada em grupo, e os alunos utilizaram como meios auxiliares calculadoras não gráficas.

Estes alunos já tinham trabalhado várias vezes em grupo noutras actividades, não constituindo, por isso, qualquer motivo de perturbação a proposta daquela metodologia de trabalho.

Em todas as questões houve um momento de interpretação das situações sob o ponto de vista físico e um de discussão da sua resolução do ponto de vista matemático, nem sempre por esta ordem.

Apesar de alguma surpresa inicial por "verem" a física na aula de matemática, entraram rapidamente na realização da actividade. Globalmente, podemos dizer que o contexto físico foi facilmente apreendido pelos alunos. Pensamos que essa compreensão funcionou como factor facilitador da realização de algumas questões e a discussão no plano da física deu significado às propostas matemáticas.

A questão 1 constituiu o período de "aquecimento". Nela os alunos tiveram o primeiro contacto com o modelo.

Na questão 2 surgiram os primeiros problemas. Os alunos tiveram dificuldade em verificar que era necessário resolver a equação em ordem a  $g$  e manifestaram também dificuldades na sua resolução.

A partir daqui, a maior parte das questões não ofereceram grandes obstáculos.

Na questão 3, a partir do cálculo de  $T$  na Lua, Júpiter e Neptuno, os alunos concluíram facilmente que  $T_2$  variava na razão inversa de  $g$ . No entanto, as respostas às três perguntas seguintes não foram uniformes. Alguns alunos optaram por apresentar valores concretos confirmados com cálculos, outros optaram por escrever que bastava considerarem-se valores de  $g$  superiores aos dados (para um  $T$  inferior a qualquer dos obtidos), e valores de  $g$  inferiores aos dados (para um  $T$  superior a qualquer dos obtidos).

A interpretação gráfica proposta na questão 4 foi feita por leitura aproxi-

mada e abordou os enquadramentos apenas sob esse ponto de vista. A aplicação das propriedades das relações de ordem só foi feita na questão seguinte (5a). Serviu esta para reforçarmos a utilidade do enquadramento progressivo (da construção progressiva das expressões) pela aplicação sucessiva das propriedades necessárias.

A última questão (5b) foi discutida em conjunto com toda a turma. Tratou-se de uma primeira abordagem ao conceito de limite. Quando  $g \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow +\infty$ , e quando  $g \rightarrow +\infty$ ,  $T \rightarrow 0$ .

A actividade "Expressões com variáveis e enquadramentos" foi dada aos alunos no final da aula para ser resolvida individualmente em casa. A discussão foi feita na aula seguinte.

As questões 1 e 2a, bastante semelhantes à da ficha do pêndulo, foram resolvidas sem dificuldades, bem como a questão 2c. É curioso registar que na resolução desta, os alunos utilizaram expressões como "tende para 0" ou "toma valores para o infinito" a par de outras do tipo "toma valores muito pequenos" ou "toma valores muito grandes".

A primeira pergunta da questão 2b não foi resolvida por todos, embora muitos tenham reconhecido que para  $s$  fixo, sempre que  $z$  aumenta 100 vezes,  $a$  aumenta 10. A segunda pergunta dessa questão foi a que levantou mais dúvidas. Muitos alunos não reconheceram que sempre que  $a$  aumentava 4 vezes (22, 24, 26, ...)  $z$  teria que aumentar 16 vezes.

### Conclusões

Ao analisarmos as actividades desenvolvidas pelos alunos, existem alguns aspectos que vale a pena salientar. São eles: i) o trabalho de grupo na realização da ficha do pêndulo, ii) a forma como foi encarada pelos alunos a ligação com a física e iii) o trabalho no campo da matemática.

O nosso papel ao longo do trabalho centrou-se no acompanhamento da actividade dos alunos, no desbloqueamento de certas situações

(resolução da equação da questão 2 da ficha do pêndulo), na discussão com toda a turma de algumas questões mais delicadas (o comportamento de T para valores de g próximos de 0 ou muito grandes — significado matemático e físico).

Tal como já referimos o trabalho decorreu em “velocidade de cruzeiro” sendo de assinalar positivamente a discussão entre os alunos dos grupos e a entajada em certos momentos da resolução da ficha.

Os alunos não ficaram particularmente delirantes por a situação apresentada estar ligada à física. Isso não impediu porém a discussão dos conceitos ao nível daquela disciplina e o empenhamento na realização das tarefas propostas na ficha. Pensamos que a situação da física funcionou não tanto como motivação, mas mais como uma forma de dar sentido a um cálculo algébrico que muitas vezes é mecanizado e tratado fora de qualquer contexto real.

Do ponto de vista matemático, as propostas atingiram os objectivos que pretendíamos. Serviram para evidenciar (tornar claras) as relações entre as variáveis de uma equação literal. Por outro lado, os alunos ficaram a trabalhar bem com os enquadramentos, inclusive nos enquadramentos de expressões com mais do que uma variável (enquadramento da soma e do produto). Serviu igualmente para discutirmos a utilização de valores exactos ou valores aproximados quando estamos a fazer enquadramentos. Alguns destes aspectos já foram confirmados neste ano lectivo.

Pensamos ainda que estas situações têm uma natureza que não se esgota no trabalho realizado. Podem ser retomadas no estudo das funções com ganhos matemáticos evidentes, nomeadamente a exploração gráfica em paralelo com o cálculo algébrico.

1 As fichas referidas neste artigo estão reproduzidas na secção de materias para a aula de matemática, pp. 7-9.

Nota: Agradecemos à professora de física Maria da Graça Ventura a colaboração no tratamento de alguns conceitos físicos abordados na ficha do pêndulo e neste artigo.

#### Referências

- Afonso, L., Bernades, A., Colaço, T., Saraiva, M. (1994). Reflexões sobre a aplicação dos novos programas do 10º ano. Actas do ProfMat 94. Lisboa, APM.
- Burghes, D., Huntley, I., McDonald, J. (1988). Applying Mathematics: A Course in Mathematical Modelling, Chichester, EllisHorwood.
- Davis, P. (1988). Applied Mathematics as a Social Contract. ZDM, 88/1, 10-15.
- Ponte, J. (1992). Problemas de Matemática e Situações da Vida Real. Revista da Educação, 11/2, 95-108. Lisboa, DEFCUL.

António Bernardes  
Escola Secundária de Gil Vicente  
Manuel Saraiva  
Universidade da Beira Interior  
Teresa Colaço  
Escola Secundária de Gil Vicente

### III Encontro Nacional de Didácticas /Metodologias da Educação Universidade do Minho, Braga 21-23 de Setembro de 1995

O Departamento de Metodologias da Educação, do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho vai organizar, nos próximos dias 21-23 de Setembro de 1995, o III Encontro Nacional de Didácticas/Metodologias da Educação.

Com a realização deste Encontro pretende-se:

1. Debater objectivos, percursos e resultados de trabalhos de investigação no âmbito das Didácticas/ Metodologias da Educação.
2. Discutir objectivos, percursos e resultados de projectos de formação de professores/educadores.
3. Analisar experiências educativas realizadas no âmbito das escolas e/ou das diferentes disciplinas escolares.
4. Discutir o estatuto das Didácticas/ Metodologias da Educação.

Serão conferencistas convidados os Professores J. Veiga Simão (Portugal), A. Choppin (França) e K. Zeichner (EUA). Realizar-se-ão mesas redondas subordinadas às temáticas seguintes: Didáctica e Formação de Professores, Reforma Curricular: abordagens retrospectivas e prospectivas, Estatuto das Didácticas/Metodologias da Educação. Haverá, ainda, lugar à apresentação de comunicações livres e à realização de workshops e symposia cujos resumos (máximo 150 palavras) deverão ser enviados até 15 de Maio.

Contactos:

Comissão Organizadora do III END/ME  
Instituto de Educação e Psicologia  
Universidade do Minho  
Campus de Gualtar  
4719 Braga Codex  
Tel: (053)604240/41  
Fax: (053)604244

#### Materiais para a aula de Matemática



As actividades propostas nas páginas seguintes são as actividades a que se refere o artigo “Oscilações de um pêndulo: duas propostas no capítulo dos reais” de António Bernardes, Manuel Saraiva e Teresa Colaço.

Ano longo do artigo essas actividades são comentados pelos autores com base na experiência que realizaram em turmas do 10º ano.

Aos colegas que as desejarem utilizar nas suas aulas aconselhamos a leitura do referido artigo.

Os autores certamente que gostariam de receber comentários sobre as actividades suscitados por novas experiências realizadas por outros professores.