Para este número seleccionámos

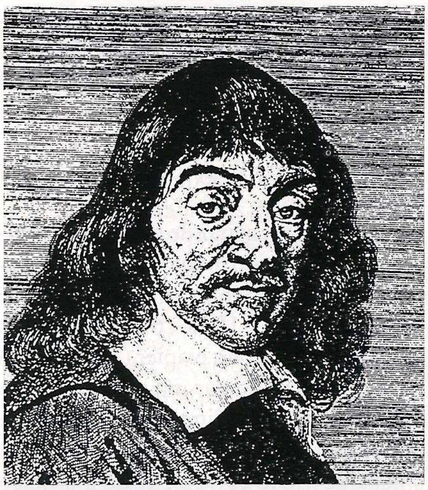
Uma rápida visão histórica

Ubiratan D'Ambrosio

Os participantes no ProfMat 94 puderam conhecer o Prof. Ubiratan D'Ambrosio como investigador no campo da Educação Matemática. No texto que se segue, escrito recentemente como apêndice ao livro Métodos de Topologia — reedição de um curso de Topologia e Análise Funcional leccionado a partir de 1960 em diversas universidades brasileiras — os leitores de Educação e Matemática poderão apreciar outra das múltiplas facetas da actividade do Prof. Ubiratan D'Ambrosio, a História da Matemática. Em poucas páginas, fica traçada uma panorâmica geral da evolução da História da Matemática desde o princípio do séc. XVII, num estilo que os nossos leitores certamente apreciarão.

A ciência passou, a partir do século XVII, por uma grande transformação, graças sobretudo aos trabalhos de René Descartes (1596-1650) e de Isaac Newton (1642-1727), naturalmente apoiados em outros cientistas da maior importância.

Descartes, na sua obra máxima, o *Discours de la méthode* (1637), dá como exemplo um modo de estudar o espaço. Já teorizado por Euclides, no século III a. C., o espaço físico era estudado na Geometria através de um elaborado sistema teórico, baseado numa lógica que, a partir de um número de proposições (noções primitivas, axiomas ou postulados, teoremas e corolários) permitia a descrição e estudo das principais figuras reconhecidas no mundo, tanto aquelas resultando das sensações mais imediatas, tais como as figuras elementares, que aparecem nas demarcações de terrenos, e daí o nome geo-metria, e nas formas artísticas, quanto aquelas que são produto de uma apurada imaginação, ao descrever movimentos de corpos celestes e arranjos e disposições de diferentes formas geométricas, tais como intersecções e sombras. Ao trazer a então nascente álgebra, principalmente a teoria das equações e seu novo simbolismo, como um dos importantes instrumentos de seu método para estudar o plano, particularmente as curvas planas, Descartes fundou um novo método para a descrição e a análise das figuras no plano e no espaço. Trajetórias, observadas na mecânica e particularmente na mecânica dos corpos celestes, poderiam ser identificadas com equações algébricas. E as importantes questões relativas a interseções e variações dessas trajetórias encontraram, na manipulação de equações algébricas, o método adequado para seu estudo.



René Descartes (1596-1650)

Pouco depois, apoiando-se em importantes explicações dos movimentos dos corpos celestes realizadas por astrônomos como Christian Huygens (1629-1695), Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), Tycho Brahe (1546-1601), Isaac Newton lança os fundamentos de um novo modo de explicar e entender os fenômenos naturais ao publicar sua obra maior, *Principia mathematica philosophiae naturalis* (1687). Essencialmente, Newton exprime a relação causa-efeito por leis ou princípios e traduz essas leis e as manifestações de causa-efeito em expressões matemáticas. Esse método, de natureza local, pois se aplica a espaço-tempo muito limitados, está conforme com o pensamento reducionista de Descartes, e passa a nortear a procura de explicações e de entendimentos para os fenômenos em geral. Essa procura de explicações e entendimentos, própria a nossa espécie, encontra assim um poderoso modelo a seguir. Acabou-se o mistério, inicia-se o que viria a ser chamado a era de razão e o protótipo do pensar racional é a obra de Newton.

Imediatamente procura-se estender esse modelo a outras áreas do conhecimento. O modelo passa a ser o paradigma de um novo pensar, que vem a ser reconhecido como ciência moderna.

Mas uma vez traduzidos os fenômenos em expressões matemáticas, como lidar com essas expressões?

No final da Idade Média, muitas áreas de conhecimento, de tradições e sobretudo motivações distintas, começam a ser relacionadas como integrando um mesmo corpus de conhecimento. Alia-se a isso o grande desenvolvimento das aplicações ao comércio e às artes, às navegações e às invenções. Note-se que essa síntese de conhecimentos de natureza variada, de estilos e objetivos distintos e representando várias tradições confluem na Europa medieval cristã e são reconhecidas como integrando um mesmo corpus de conhecimento, que vem a ser chamado Matemática. A palavra parece ter sido usada pela primeira vez no século XIII. Naquela época ainda estavam sendo preparadas as bases para o aparecimento da ciência que viria a ser identificada como Matemática. Somente no século XIX vamos ver a Matemática como uma ciência autônoma, período em que surgem novas percepções de interesse na Geometria, conforme o que havia nos *Elementos* de Euclides. Ao mesmo tempo praticava-se uma outra Geometria, desenvolvida com vista aos estudos astronômicos e às navegações, a Trigonometria, e uma outra Geometria, incorporando tradição hebraica e muito utilizada em construções e artes. Conhecia-se a Aritmética que aparecia nos Elementos de Euclides e uma outra Aritmética que tinha a ver com operações mercantis, uma Álgebra associada a problemas práticos de heranças e comerciais e uma outra Álgebra, nascente, baseada numa manipulação de símbolos, inspirada na resolução de equações, algumas incursões em Análise Combinatória em vistas ao estudo das Probabilidades, e uma preocupação com Movimento e com Ótica, que caracteriza as preocupações dos cientistas ingleses no final da Idade Média e que nos séculos seguintes vai ter grande desenvolvimento.

No século XVII, uma vez definido o cenário do planeta e do próprio espaço

Isaac Newton (1642-1727)

cósmico que resultou das grandes navegações, há notáveis avanços da nova ciência que se definia. Destacam-se os trabalhos de Galileo na Mecânica, a introdução da Geometria Analítica por Descartes, as primeiras investigações sobre teoria das probabilidades de Pierre de Fermat (1601- 1665) e Blaise Pascal (1623-1662), o método da indução matemática, desenvolvido pelo próprio Pascal, e a invenção do Cálculo Infinitesimal, independentemente por Isaac Newton (1642-1727) e por G.W. Leibniz (1646-1716).

Esse era o estado da arte no século XVII.

Newton foi capaz de utilizar o instrumental aritmético indú-arábico, reforçado pelas importantes contribuições de Simon Stevin (1548-1620) (números decimais) e de John Napier (1550-1617) (logaritmos) e de dar um passo além de Thomas Bradwardine (?1290-1349) e outros ao considerar movimentos num "instante". Ora se velocidade é a razão espaço/tempo, ao se considerar instantes, isto é, tempos muito curtos, teremos em consequência espaços muito pequenos, e velocidades nesses "instantes". Assim é possível reduzir, à la Descartes, a análise de um movimento, com uma longa trajetória, ao comportamento desse movimento em trechos pequenos da trajetória. Nesses "instantes" a trajetória, normalmente uma curva, pode ser pensada como um trecho linear que aproxima a trajetória real. Claro, ao se fazer essa aproximação está-se cometendo um erro. Normalmente quanto menor for o "instante", e consequentemente o trecho "linearizado", menor o erro cometido nessa aproximação. Ouanto menor for o "instante" — "quanto menor" significa que esse intervalo de tempo se aproxima de zero, sendo quase zero, o que se diz tendendo a zero — melhor será a aproximação. Essa é a idéia fundamental: substituir em intervalos de tempo muito pequenos o trecho de trajetória — normalmente uma curva — por um trecho linear. Naturalmente comete-se um erro. Mas esse erro será tanto menor quanto menor esse "instante". Como o instante tende a zero, o erro tenderá a zero e teremos efetivamente a trajetória real. Essas idéias, naturalmente imprecisas, sobre o que se chamam infinitésimos, isto é, quantidades que tendem a zero, representaram uma ruptura filosófica com o pensamento escolástico, que rejeitava o infinito. E naturalmente provocou muita reação e oposição. Somente no século XIX, sobretudo com os trabalhos de Augustin Cauchy (1789-1857) essas idéias tomam uma forma satisfatoriamente rigorosa. Isso não impede que as idéias de Isaac Newton, sobretudo seu Cálculo Diferencial, o instrumental matemático novo criado para poder tratar as expressões matemáticas que exprimiam as leis associadas a fenômenos para os quais se identificam a relação causa-efeito, fossem adotadas pelos cientistas da Europa continental.

Independentemente de Newton, G.W. Leibniz também desenvolveu um Cálculo Diferencial, equivalente ao newtoniano, porém com outra motivação, outras técnicas e sobretudo outra notação, muito mais conveniente. A combinação das idéias de Newton e de Leibniz foi adotada e proliferou na Europa sob a denominação de Análise Infinitesimal, o que hoje se chama Cálculo Diferencial e Integral. A estruturação rigorosa dessas técnicas, cujo principal proponente foi Cauchy, é o que se chama Análise Matemática.

Uma das características do Cálculo é ser uma teoria local. A derivada é normalmente definida relacionando espaço e tempo e motivada pelas considerações sobre movimento que tanto preocupavam os cientistas da idade média, principalmente na Inglaterra. A razão "espaço percorrido" num "intervalo de tempo", que é a leitura da expressão tão familiar s/t levada ao limite, isto é, examinando o que se passa num instante (t > 0) e portanto correspondente a uma trajetória muito pequena (s > 0), conduz à definição de derivada de uma função. Não vamos repetir as definições já conhecidas de todos os que estudaram os elementos do Cálculo Diferencial. [...]. Vamos simplesmente observar que essa definição exige, ao se dizer "espaço percorrido" um entendimento do que é espaço e de sua estrutura. Ao se fazer esse "espaço percorrido" tender a zero é necessário uma boa compreensão de como medir esse espaço, o que significa tender a zero e, enfim, penetrar na própria estrutura do espaço com o qual estamos lidando. O mesmo ao se dizer "intervalo de tempo" e ao se lidar com o tempo. Newton tratou isso muito simplesmente considerando o conhecimento do tempo um atributo divino e simplesmente trabalhando com tempo como se fossem números reais, com suas operações +. O que hoje chamamos "grupo aditivo". Para espaço recorre ao espaço sensível, euclideano, e adota para ele a métrica da distancia euclideana. Naturalmente lida com dimensões superiores, sem porém se preocupar com a natureza dessa dimensão, sobretudo quando se introduz a generalização da noção de diferencial para aproximações mais finas, isto é, as séries, trabalho em que se destaca Colin Maclaurin (1698-1746).

Efetivamente, o século XVIII representa o aprimoramento das idéias de Newton, Leibniz e Maclaurin, sobretudo através de uma intensa exploracão da representação muito geral de uma função mediante as séries infinitas, onde se descatacam trabalhos da família Bernoulli, Daniel (1700-1782), James (1654-1705) e John (1667-1705) e de Leonhard Euler (1707-1783). Também se nota uma grande busca de aplicações dos métodos newtonianos da Mecânica Celeste e a fenômenos que obedecem a princípios extremais, dando grande impulso ao Cálculo das Variações, sobretudo em Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre Simon de Laplace (1749-1827) e a uma revisão dos fundamentos da Geometria euclidiana, com os trabalhos de Gaspar Monge (1746-1818) e de

G. W. Leibniz (1646-1716)

Jean Vlctor Poncelet (1788-1867). Note-se que se esboçam novas considerações sobre espaço e uma aquisição de familiaridade com o infinito. Sempre com muita criatividade e com a busca de novo, mas com pouca preocupação com o rigor dos métodos usados e dos novos métodos desenvolvidos.

O século XIX se caracteriza pela busca do rigor e de novas visões do mundo. Não se pode esquecer que esse é o século em que as duas grandes revoluções dos século anterior se consolidam, justamente afetando as duas maiores forças políticas da época, Inglaterra e França. Desde os trabalhos de Carl Friedrich Gauss (1977-1855) e de Augustin Louis Cauchy (1700-1857) às inovações de Niels Abel (1802-1829) e Evariste Galois (1811-1832) se nota o surgimento de uma nova percepção do que é Matemática através de uma reflexão profunda justamente sobre os elementos básicos do método iniciados por Newton e Leibniz: espaço e tempo. As teorizações de Nikolai Lobatchevsly (1793-1856) e de Janos Bolyai (1802-1860) vem ampliar as possibilidades da Geometria Euclideana e as generalizações de Arthur Cayley (1821-1895), James Joseph Sylvester (1814-1897), Willian Rowan Hamilton (1807-1865) e de Hermann G. Grassmann (1809-1877) vem abrir à Geometria Analítica novas possibilidades na representação de espaços muito gerais. As novas percepções do finito, do discreto, introduzidas por George Boole (1815-1864) e Charles Babbage (1792-1817) vem abrir um campo relativamente esquecido desde os trabalhos de B. Pascal e B. W. Leibniz, que se refere às possibilidades de computação e manipulação de dados númericos.

Chega-se no final do século XIX ao apogeu da Analise Matemática, linear e deterministica, introduzida por Newton e por Leibniz, com um monumental trabalho de síntese do mundo observável ou imaginado a partir desse observável. A busca de novas concepções de espaços é dominante e os trabalhos de Bernhard Riemann (1826-1866), Karl Weierstrass (1815-1897), Felix Klein (1849-1925), Henri Poincaré (1854-1912), e David Hilbert (1862-1943) são representativos desse apogeu. O que se passa de essencial nesse momento?

A Análise Matemática e seu poderoso instrumento Cálculo Diferencial e Integral são levados a um enorme aprimoramento na explicação do um espaço observável e generalizado no esquema dessas observaçõs. O trabalho num espaço dual, já frequente nas generalizações da Geometria e ainda mais frequente nas aplicações da Análise Matemática a problemas fisicos de natureza vanacional sugeriam a busca de uma nova conceituação de espaço. Efetivamente as conceituações não eram novas, mas sem dúvida representam a transição necessária para as novas conceituações que só começam a surgir nos meados do atual século XX. Novas conceituações de espaço e de tempo, condizentes com o que hoje é possível observar e medir, impensadas até o início do século, abrem hoje as possibilidades de uma nova matemática, de um retorno ao momento de grande criatividade, característico do século XVII. Podemos afirmar que estamos vivendo um novo renascimento.

Como será a "nova matemática" desse novo renascimento temos muito pouca idéia. Porém o bom senso nos indica que ela deverá estar mais próxima do crepúsculo da "velha matemática", aquela que se iniciou com Descartes Newton e Leibiniz, isto é, aquela praticada no início deste século e ainda hoje ativa, do que da aurora da "velha matemática", aquela que dominava os séculos XVll, XVIII e XIX.

Ubiratan D'Ambrosio
Universidade de Campinas, Brasil