Renovação do ensino da geometria

Contributos de Rita Bastos e Cristina Loureiro

Alexandra Pinheiro e Eduardo Veloso

De há dois anos para cá, a geometria retomou um lugar privilegiado no ensino da Matemática. Por isso, torna-se legítimo perguntar: Que perspectivas novas, tanto nos conteúdos como nos métodos, têm sido propostas? Que tipos de actividades se têm tornado ou são avançadas como mais prometedoras para alcançar os objectivos dos novos programas? Que conexões têm sido feitas ao longo do ensino da geometria?

Não é possível responder concreta e definitivamente a estas questões, em parte devido ao facto apontado por Cristina Loureiro e Rita Bastos de que a geometria durante muitos anos foi deixada para segundo plano, dando origem a carências graves quer nas aprendizagens matemáticas dos alunos quer na preparação dos professores, provocando em muitos destes uma certa insegurança. No entanto, em muitas sessões dedicadas à geometria durante o ProfMat 94, tipos de actividades e propostas inovadoras quanto aos conteúdos foram apresentadas e experimentadas pelos participantes. As colegas Rita Bastos (R.B.), da Esc. Secundária de António Arroio e Cristina Loureiro (C.L.), da Esc. Superior de Educação de Lisboa, que orientaram um curso de dois dias e uma sessão prática de três horas sobre temas de geometria, utilizaram nessas sessões actidades inovadoras e moderaram discussões com base num texto distribuído aos participantes. Parece-nos que as propostas destas colegas são bem interessantes e representativas de uma reflexão que deve ser feita entre nós sobre os novos rumos que deve tomar o ensino da geometria. Por isso, procuraremos neste artigo recolher e comentar algumas dessas ideias e propostas[1].

Geometria do 5º ao 12º ano de escolaridade

Recomendações das Normas para o Currículo do NCTM

Tópicos a dar maior atenção

- Desenvolver uma compreensão dos objectos geométricos e das suas relações.(5º-8º)
- Utilizar a geometria na resolução de problemas.(5º-8º)
- Integração através de todos os temas, em todos os anos de escolaridade.(9º-12º)
- Desenvolvimento de curtas sequências de teoremas.(9º-12º)
- Abordagens por coordenadas e por transformações.(9º-12º)
- Explorações em computador de figuras bi e tridimensionais.(9º-12º)
- Argumentos dedutivos expressos oralmente ou por frases ou parágrafos escritos.(9º-12º)
- Geometria no espaço.(9º-12º)
- Aplicações ao mundo real e modelação.(9º-12º)

Tópicos a dar menor atenção

- Memorizar o vocabulário da geometria.(5º-8º)
- Memorizar factos e relações.(5º-8º)
- Geometria euclidiana como sistema axiomático completo. (9º-12º)
- Demonstrações dos teoremas de incidência e de "situado entre".(9º-12º)
- Geometria de um ponto de vista sintético. (9º-12º)
- Demonstrações "a duas colunas".(9º-12º)
- Polígonos inscritos e circunscritos.(9º-12º)
- Teoremas sobre a circunferência envolvendo razões de segmentos.(9º-12º)
- Geometria analítica como um tema isolado.(9º-12º)

Extraído das *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar,* do NCTM, tradução editada pela APM e pelo IIE.

Alternativas para o ensino da geometria

No início do texto utilizado pelas colegas nas sessões do ProfMat, é significativamente referida uma listagem de tópicos de geometria a que deve ser dada mais atenção num ensino renovado de Matemática, de acordo com as *Normas para o Currículo* do NCTM (ver caixa, onde também acrescentámos os tópicos a que o NCTM recomenda deve ser dada menor atenção do que tem sido habitual). Na realidade, as recomendações do documento do NCTM constituem hoje uma referência fundamental para a construção de um currículo apropriado para a geometria do ensino básico e secundário. Vistos a esta luz, como podemos apreciar os novos programas? No texto a que nos estamos referindo, as autoras respondem:

> "É verdade que o novo programa do terceiro ciclo integra, nas suas indicações metodológicas, algumas destas preocupações. Contudo, a listagem de temas que apresenta, por ser demasiado compartimentada e exaustiva, dificulta uma abordagem centrada na resolução de problemas e nas conexões, induzindo um tratamento mais virado para o conhecimento de vocabulário, factos e relações. No que respeita ao secundário,

estas indicações aparecem muito esbatidas e a sua operacionalização torna-se incompatível com as propostas de abordagem hipotético-dedutiva da Geometria no espaço, com o tratamento compartimentado da geometria analítica e com o grande ênfase no cálculo algébrico e vectorial."

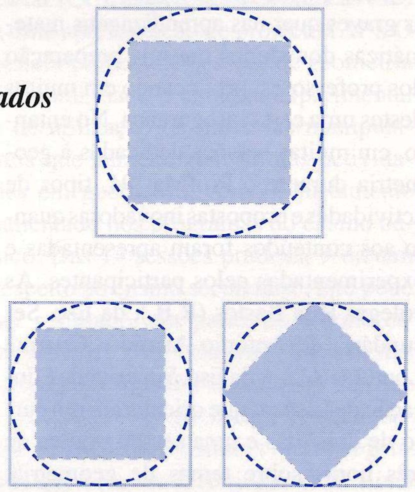
Mas as colegas não se limitam a apresentar esta crítica aos programas. Apresentam alternativas para um modelo de ensino/aprendizagem da geometria, que designam por modelo construtivo, e que apresentamos nesta página. Estas ideias são ilustradas com comentários sobre a resolução do problema da determinação da razão entre os lados de dois quadrados formando uma certa figura e de outros "problemas exemplares"

Ideias fundamentais para um modelo construtivo de ensino/aprendizagem da geometria

1. Há raciocínios importantes em geometria, que surgem independentemente dos temas e que se revelam fundamentais na resolução de problemas e na construção dos conceitos.
2. Para raciocinar geometricamente não é preciso ter adquirido previamente um grande vocabulário, dominar muitos conceitos ou conhecer muitas propriedades; pelo contrário, a construção dos conceitos e a descoberta das propriedades pode ser feita a partir da resolução de problemas e de actividades investigativas.
3. Quando aplicamos uma fórmula ou reproduzimos uma demonstração, o raciocínio geométrico operacionalizado é mínimo, e muitas vezes nem sequer existe. É quando encontramos um processo para resolver um problema ou temos que argumentar para defender uma ideia ou uma conclusão, que sentimos o poder dos raciocínios geométricos.
4. Uma abordagem da geometria centrada na resolução de problemas constitui uma fonte aliciante e muito rica de ideias matemáticas, que permite estabelecer conexões com quase todos os outros temas matemáticos.
5. A realidade palpável tem um papel importante na compreensão de muitos problemas de geometria. A grande possibilidade de concretização física e de aplicação a problemas reais fazem com que a aprendizagem da geometria possa ser de facto significativa para os alunos.
6. A geometria é rica em problemas que podem ser trabalhados com complexidade crescente. O mesmo problema pode aparecer ao longo dos tempos com vários níveis de aprofundamento e pode ser ampliado a partir do levantamento de novas questões.
7. Os materiais manipuláveis constituem uma fonte rica de ideias e são indispensáveis em todos os níveis do ensino da geometria. A própria construção de materiais pode ser o ponto de partida para a utilização de raciocínios geométricos e para a formulação de novos problemas.

Problema nº 1

Qual é a razão entre os dois quadrados da figura?

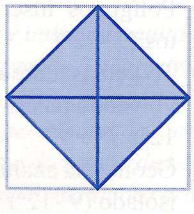


Para resolver este problema privilegiando os raciocínios geométricos é necessário procurar uma relação entre os dois quadrados que pode passar por uma transformação geométrica. No entanto, não é preciso ter definido rotação, isometria, transformação geométrica... ou ter estudado as suas propriedades. Pelo contrário, o poder das transformações geométricas e a necessidade de as estudar vão aparecendo à medida que elas ajudam a resolver os problemas.

Um aluno que esteja familiarizado com os objectos geométricos, que tenha trabalhado o conceito de área com base na composição/decomposição de figuras, imediatamente se apercebe da razão entre as áreas dos dois quadrados. Naturalmente que estamos a enfatizar a relação medida/comparação deixando para segundo plano a relação medida/cálculo. Tradicionalmente, o trabalho sobre áreas tem sido focalizado na utilização de fórmulas, criando a perspectiva limitada de que medir uma área é fazer um cálculo, perdendo-se até as noções de medida e de unidade de medida. Para relacionar a razão entre as áreas com a razão entre os lados é necessário ter trabalhado os conceitos de semelhança e proporcionalidade nos aspectos em que estes raciocínios se revelam eficazes. O conceito de semelhança introduz dois raciocínios proporcionais importantes.

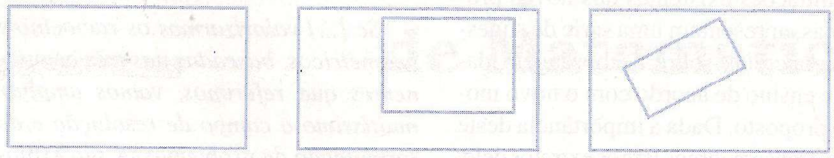
Um, é o raciocínio de proporcionalidade entre medidas lineares, que está intimamente ligado à resolução de triângulos, e que praticamente tem sido o único a ser tratado. O outro, é o de proporcionalidade entre medidas de dimensões diferentes (comprimentos, áreas e volumes) e que permite estabelecer outras relações. Estas têm sido ignoradas, apesar do seu poder e eficácia na resolução de problemas.

Se, por outro lado, resolvessemos este problema utilizando o teorema de Pitágoras, estaríamos a reduzi-lo a um simples exercício de cálculo, que não é necessariamente de mais fácil compreensão que o processo que propusemos. Além disso, este cálculo não iria trazer nada de novo, enquanto o outro abre hipóteses de generalizações a outros polígonos e até a outras dimensões.



Problema nº 2

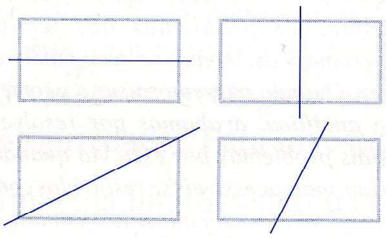
Quais são as rectas que dividem um rectângulo ao meio? E quais são as rectas que dividem ao meio os dois rectângulos de cada uma das figuras ao lado?



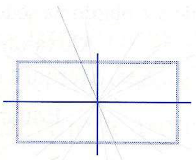
Formula um problema análogo para o espaço.

O que é dividir ao meio um rectângulo? É dividi-lo em duas figuras congruentes, ou em duas figuras equivalentes? Duas figuras congruentes são equivalentes, mas o recíproco não é verdadeiro... Aparentemente temos dois problemas para resolver.

É fácil encontrar algumas rectas que dividem o rectângulo em duas figuras congruentes.



E também não é difícil concluir quais são todas as rectas que têm essa propriedade. O difícil é explicar porque é que são essas e só essas.



Nesta pesquisa, a preocupação era encontrar todos os pares de figuras congruentes porque sabíamos que elas eram equivalentes.

Mas haverá outras rectas que dividam o rectângulo em duas figuras equivalentes não congruentes?

(Nota: Este problema é apresentado neste número da revista na secção "Materiais para a sala de aula". Se assim entender, poderá tentar a solução dele antes de prosseguir a leitura deste texto.)

É a interpretação gráfica que nos garante a existência de uma solução única, a recta que divide o rectângulo em duas figuras equivalentes é a mesma que o divide em duas figuras congruentes. Neste caso, "dividir ao meio" tanto pode ser entendido como dividir em figuras equivalentes como dividir em figuras congruentes, a solução é a mesma.

Esta discussão pode ser interessante para sensibilizar os alunos para questões de rigor de linguagem, mas este tratamento exaustivo só faz sentido em níveis bastante avançados. Nestes níveis tem até a vantagem de estabelecer conexões com o estudo de funções.

A compreensão do problema no plano é essencial para a passagem para o espaço. Mesmo com modelos manipuláveis, torna-se muito complicado descobrir quais são os planos que dividem o paralelepípedo ao meio, se não se tiver compreendido porque é que as rectas que passam no centro do rectângulo são as únicas que o dividem ao meio.

Por outro lado, a familiaridade na passagem do plano para o espaço, eficaz na resolução deste problema e de muitos outros, não é uma questão pacífica e precisa de ser muito trabalhada.

Se no plano, é uma recta que divide ao meio, no espaço é um plano. No plano, todas as rectas que dividem o rectângulo ao meio passam no centro do rectângulo, que é o centro da simetria central que os deixam invariantes (rectângulo e recta). No plano, uma simetria central é o mesmo que uma rotação de 180°.

No espaço, os planos que contêm um eixo de rotação que os deixa invariantes (paralelepípedo e plano) dividem um paralelepípedo ao meio, mas não são os únicos. No espaço, uma simetria central não é uma rotação. O centro do paralelepípedo é o centro de uma simetria central que deixa invariante o paralelepípedo e qualquer plano que passe no centro. Então, todos os planos que passam no centro o dividem ao meio.

A questão da divisão em dois sólidos equivalentes é análoga à do plano, só que agora com volumes iguais. A utilização de paralelepípedos em acrílico transparente com líquido colorido é uma maneira sugestiva de visualisar a variação do volume.

O modelo construtivo e o ensino actual da geometria

Continuando a descrever o que poderia ser um modelo construtivo para o ensino da geometria, R.B. e C. L. identificam três componentes básicas para o raciocínio geométrico:

"• composição/decomposição
• transformação num espaço e entre espaços geométricos
• proporcionalidade geométrica"

E acrescentam:

"Estas três componentes podem ser o fio condutor de toda a aprendizagem da geometria e devem ser objecto de um tratamento continuado, a diversos níveis, e ligadas a situações diversificadas. Talvez não sejam aquelas que nós nos habituámos a privilegiar."

O problema 3 retrata uma das componentes, a proporcionalidade geométrica relacionando diferentes dimensões.

Na parte final do texto, as autoras fazem uma análise crítica da situação actual do ensino da geometria, incluindo as limitações existentes nos novos programas, apresentam uma série de sugestões concretas sobre a abordagem daquele ensino de acordo com o novo modelo proposto. Dada a importância deste texto, transcrevemos largos extratos dele.

Sobre a hierarquização da geometria e a obcessão pelo cálculo

No ensino da Geometria, a ideia que dominou, e ainda hoje prevalece, é a de que ela é um corpo hierarquizado de conhecimentos sobre figuras em que os aspectos métricos têm um papel relevante. Basta recordar que começávamos por estudar os triângulos, e só depois pensávamos nos quadriláteros e nos outros polígonos.

A obcessão pelo cálculo obscurecia a verdadeira geometria, impedia-nos muitas vezes de optar por raciocínios visuais, mais simples e mais compreensíveis para os alunos, e por isso limitava extraordinariamente o campo de resolução de problemas.

Valorizar os raciocínios geométricos

Se [...] valorizarmos os raciocínios geométricos, baseados nas três componentes que referimos, vamos ampliar muitíssimo o campo de resolução e de formulação de problemas. A sua exploração não só vai contribuir para construir e aprofundar conceitos geométricos e outros, como também para desenvolver capacidades diversas.

O centro do processo de aprendizagem são os raciocínios sobre as figuras e não as figuras em si. Estas passam a ser o suporte dos raciocínios: o que interessa não é o rectângulo, mas os raciocínios que se fazem com base nesse rectângulo, porque o que vai fazer compreender e resolver um problema análogo são os raciocínios e não a figura.

Articulação entre o 3º ciclo e o secundário; geometria sintética e analítica

A falta de articulação entre os programas do terceiro ciclo e do secundário também vai agravar estas dificuldades. Da abordagem exclusivamente sintética, passa-se para a abordagem exclusivamente analítica. [Ora,] alguns dos problemas que resolvemos habitualmente por via analítica podem ser resolvidos por outros processos igualmente válidos e, às vezes, mais acessíveis.

Da mesma forma que não se podem pôr de lado as resoluções de problemas por via sintética só porque os alunos já estão em anos mais avançados, também uma iniciação da abordagem analítica da geometria poderia aparecer durante o 3° ciclo.

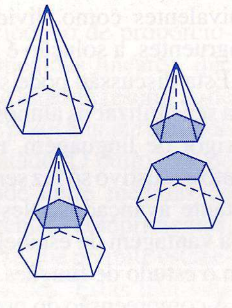
A diferença de abordagens nos dois ciclos, sintética no 3° ciclo e analítica no secundário, é uma barreira ao desenvolvimento de atitudes críticas, de capacidades criativas e integradoras de raciocínios. São os raciocínios que devem ser adequados aos problemas, em vez de adequar os problemas aos temas programáticos, como se tem vindo a fazer. Quando queremos usar a geometria analítica, acabamos por resolver alguns problemas por essa via quando seriam mais acessíveis se resolvidos com outro tipo de raciocínios. Isto conduz a um comportamento condicionado dos alunos, que está longe de constituir uma aprendizagem da geometria que contribua para a sua formação integral.

1. O texto integral distribuído na Sessão Prática 9 pode ser obtido na sede da APM.

Alexandra Pinheiro
Esc. Sec. Marquês de Pombal
Eduardo Veloso

Problema nº 3

De uma pirâmide pentagonal pretende-se obter um tronco com a mesma base e metade do volume da pirâmide. Qual deverá ser a altura do tronco? E se pretendermos um tronco com um terço do volume da pirâmide?



Há uma fórmula para calcular o volume de um tronco de piramide... mas quem é que se lembra dela? E mesmo que fizéssemos um esforço para nos lembrarmos, iríamos perder-nos certamente no meio de tantos cálculos!

Como qualquer tronco é sempre obtido por um plano paralelo à base, a pirâmide mais pequena, que se destaca, é sempre semelhante à pirâmide inicial. Assim, a razão entre as alturas pode ser obtida directamente da razão entre os volumes.

A partir deste raciocínio, a dedução de uma fórmula para o volume do tronco de pirâmide, ou de cone, pode ser uma actividade matemática interessante.

Aplicar a fórmula como uma simples receita é que não passa de um ritual sem sentido! Isto não significa que algumas vezes não tenhamos outra alternativa senão recorrer a uma fórmula sem termos hipóteses de compreender de onde é que ela veio, e isso até pode ser muito útil, não podemos é reduzir e limitar a actividade matemática dos nossos alunos à repetição desses rituais.

Contrariamente ao que nos habituámos, a Geometria é um dos campos da Matemática onde a resolução de problemas sem o recurso a fórmulas e receitas normalizadas é muito acessível, produtiva e eficaz.

Materiais para a aula de Matemática

A actividade proposta na página seguinte foi adaptada a partir do texto para discussão distribuído na sessão prática SP9, no ProfMat 94, orientada por Cristina Loureiro e Rita Bastos. Para compreender em que contexto aparece, ler o artigo "Renovação do ensino de geometria: contributos de Rita Bastos e Cristina Loureiro." Esta actividade é apropriada para o Ensino Secundário.