"Um quadrado e dez das suas raízes..."

Paulo Alvega

"Um quadrado e dez das suas raízes é igual a trinta e nove dirhems. [Qual é a sua raíz?]." Al-Khwarizmi, séc. IX. Sobre a resolução geométrica de equações polinomiais pelos árabes.

Há algum tempo, um amigo dizia-me, com indisfarçável orgulho, que alguns anos após ter frequentado o liceu ainda se lembrava da fórmula resolvente e da sua aplicação na resolução de equações do 2º grau, como se assim mostrasse ter sido então um aluno de sucesso. Este episódio ilustra como a dita fórmula e as equações são indissociáveis e como a componente algébrica na resolução de equações é praticamente esmagadora, escondendo muitas vezes outros aspectos. Ora vejamos, nunca se perguntou, de onde se originou tal fórmula? Ou como se resolveriam as equações antes da sua utilização?

Tomemos como exemplo os árabes e a forma como no séc.IX o famoso matemático e astrónomo de Bagdad, Muhamad Ibn Músã Al-Khwarizmi, no seu livro *Al-kitab al-muthasar fihisab al-jabr wa-l-muqabala*, explicava as estratégias possíveis para a resolução de equações do 2ºgrau através de processos geométricos.

Note-se por curiosidade a origem árabe, geralmente aceite, das palavras álgebra (al-jabr) e algoritmo (latinização do nome Al-Khwarizmi, na tradução latina do título do livro *Algoritmmi de Numero Indorum*). O próprio título, literalmente *Ciência da restauração e redução*, alude às mudanças de membro e às eliminações de termos iguais em membros opostos. A álgebra de Al-Khwarizmi é retórica (utiliza-se neste artigo a notação actual, embora no original até mesmo os algarismos apareçam escritos por palavras) e trata apenas de soluções e coeficientes positivos. Nos seis capítulos deste livro são analisadas regras para a resolução dos vários tipos de equações, a

فأما الأموال والجذور التى تعدل العدد فمثل قولك
مال وعشرة أجذاره يعدل تسعة وثلاثين درهما ومعناه أى مال اذا زدت عليه مثل
عشرة أجذاره بلغ ذلك كله تسعة وثلاثين . فبابه (٢) أن تنصف الأجذار وهى فى
هذه المسئلة خمسة فتضربها فى مثلها فتكون خمسة وعشرين فتزيدها على التسعة
والثلاثين فتكون أربعة وستين فتأخذ جذرها وهو ثمانية فتنقص منه نصف
الأجذار هو خمسة فيبقى ثلاثة وهوجذر المال الذى تريد والمال تسعة .

"Quanto aos quadrados e às raízes, que igualam o número, é como quando tu dizes: um quadrado e dez das suas raízes igualam trinta e nove dirhems. O seu significado é que todo o quadrado, se tu lhe juntas o equivalente a dez das suas raízes, [é tal que] atinge trinta e nove.
O seu processo [de resolução] consiste em dividir as raízes por dois, e é cinco no problema. Multiplica-lo por si mesmo e será vinte e cinco. Junta-lo a trinta e nove. Isso dará sessenta e quatro. Tomas então a raíz quadrada que é oito e tiras-lhe a metade [do número] de raízes e é cinco. Restam três e é a raíz do quadrado que procuras e o quadrado é nove."
Al-Khwarizmi, *Resumo do cálculo pela Jabr e pela Muqabala.*

saber, $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$ e $ax^2 = bx + c$ a partir de três quantidades: quadrados, raízes e números (representadas respectivamente por x^2, x e números)

Por exemplo, o capítulo IV inclui três formas diferentes (ver uma delas na caixa da página anterior) para explicar a resolução do caso: quadrados e raízes igual a números, i.e., $ax^2 + bx = c$.

Assim, a estratégia apresentada para a resolução da equação *um quadrado e dez das suas raízes é igual a trinta e nove* ($x^2 + 10x = 39$), era a seguinte:

1. Traçar um quadrado [ABCD] de área x^2. (ver fig.1A)
2. Traçar dois rectângulos de área $5x$. (ver fig.1B) (nota: $5x + 5x = 10x$)
3. Obtém-se um segundo quadrado de área 25, sendo a área da parte sombreada $x^2 + 10x$, portanto 39 unidades.(ver fig.1C)
4. Assim o quadrado [AMNP] tem área total de 64 unidades, sendo o lado igual a 8 unidades. Concluimos que uma raíz, x, mais 5 unidades dão o lado deste quadrado, igual a 8. Então a raíz (positiva) é 3. Para obter a outra raíz (-13) basta fazer $c = 3x$ ou $-b = 3 + x$, mas os árabes não a reconheciam.

(Proposta: resolver as equações $x^2 + 4x = 12$ e $x^2 + 12x = 64$ por este método).

Para o caso quadrados e números igual a raízes ($ax^2 + c = bx$), Al-Khwarizmi apresenta um outro esquema geométrico de resolução. Tomemos como exemplo a equação *um quadrado e vinte e um é igual a dez das suas raízes* ($x^2 + 21 = 10x$). O processo é o seguinte:

1. Traçar o quadrado [*ABCD*] de área x^2. (ver fig. 2A)
2. Traçar o rectângulo [*BCEF*] de área 21. (ver fig. 2B)
3. O rectângulo [*ADFE*] terá área $x^2 + 21$ ou seja $10x$, então $\overline{AF} = \overline{DE} = 10$. (ver fig. 2C)
4. Bissectar [*AF*] em *G* (portanto $\overline{GF} = 5$)

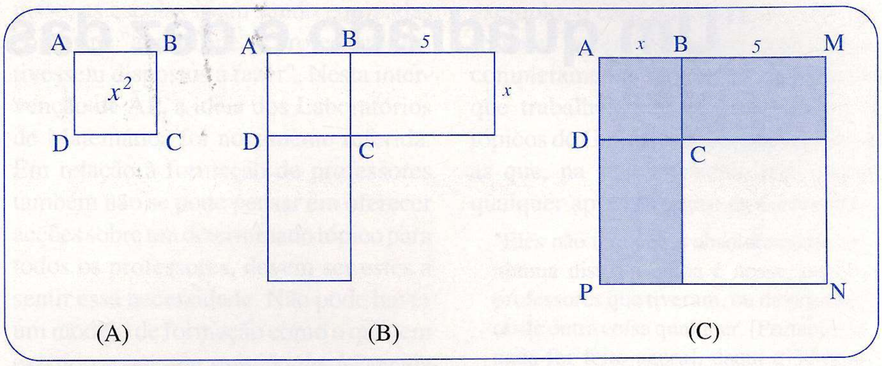

fig. 1

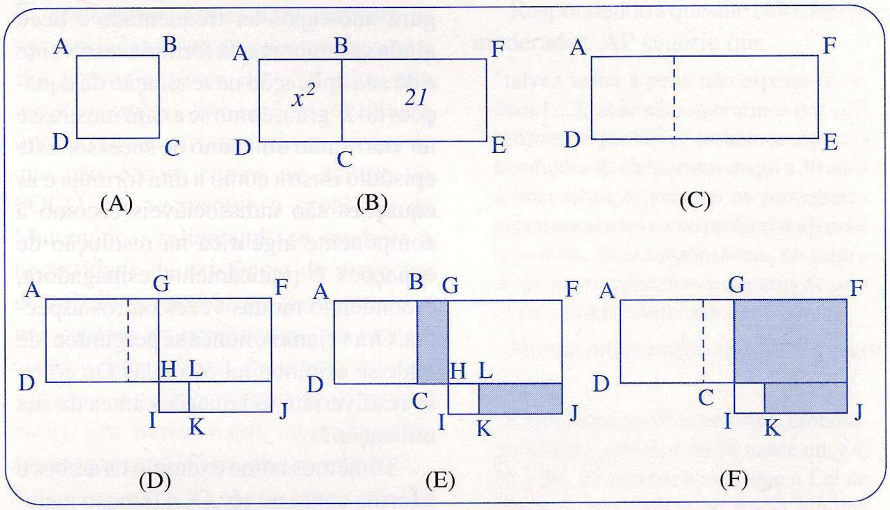

fig. 2

e prolongar [*GH*] até obtermos um quadrado [*FGIJ*]. (ver fig. 2D)
5. Traçar [*LK*] de modo que [*HLIK*] seja quadrado. Por construção, as áreas de [*BGHC*] e [*LEJK*] são iguais. (ver fig. 2E)
6. A área sombreada é 21 e a área de [*GFJI*] é 25 (5×5), de onde resulta que [*HLKI*] tem área 4. (ver fig. 2F)
7. Sendo $\overline{HI} = 2 = \overline{CH}$ e $\overline{DH} = 5$, então $\overline{DC}$ (uma raíz) é igual a 3 (uma das soluções).

(*Proposta*: com a mesma estratégia, resolver $x^2 + 5 = 6x$ e $x^2 + 15 = 8x$)

Quanto às equações cúbicas, Omar Khayam (1050-1122) propõe na sua Álgebra soluções geométricas (aliás, acreditava na não existência de soluções aritméticas) utilizando a intersecção de cónicas, método já utilizado pelos gregos Menecmo e Arquimedes, e pelo árabe Al-Hazem, mas que Khayam generaliza.

Para o caso $x^3 + bx = c$, por exemplo, Khayam utiliza uma parábola e uma circunferência, como indicado na fig. 3.

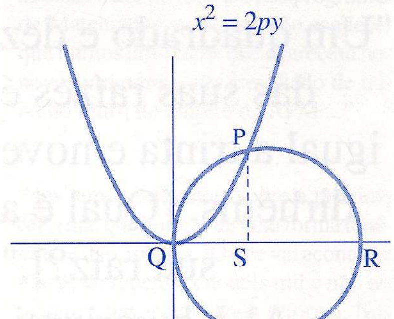

fig.3

A circunferência e a parábola ficarão definidas se relacionarmos $\overline{QR}$ e $2p$, respectivamente, com os coeficientes da cúbica b e c, sendo $P(x,y)$ o ponto de intersecção (distinto da origem) das duas curvas e solução da equação.

Utilizaremos notações modernas para encontrarmos essas relações.

Como P está na parábola, $x^2 = 2py$ ou $\frac{2p}{x} = \frac{x}{y}$. Como P está na circunferência, y é meio proporcional entre x e $\overline{QR} - x$, ou $\frac{x}{y} = \frac{y}{\overline{QR} - x}$.

Então

$$\frac{4p^2}{x^2} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2}{\left(\overline{QR} - x\right)^2} = \frac{x}{\overline{QR} - x}, \text{ pois}$$

$y^2 = x\left(\overline{QR} - x\right)$ (equação da circunferência). Portanto $x^3 = 4p^2\overline{QR} - 4p^2x$ ou $x^3 + 4p^2x = 4p^2\overline{QR}$. Daí $4p^2 = b$ ou $2p = \sqrt{b}$ e $4p^2\overline{QR} = c$ ou $\overline{QR} = \frac{c}{b}$, relações que pretendíamos encontrar.

Na próxima vez que falar da fórmula resolvente, a aplicar ou tratar da resolução de equações, pense um pouco nos processos geométricos propostos pelos árabes e se se justificar lembre que a fórmula é muito prática mas não é tudo...

Já agora, note que não se respondeu à questão quanto ao aparecimento da fórmula resolvente. Um desafio: procure descobrir a sua origem e o seu enquadramento histórico-matemático.

Nota: O texto em árabe foi tirado do livro Histoire d'Algorithmes, de Jean-Luc Chabert e outros autores, da editora Belin.

Bibliografia

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press

Boyer,C.(1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons Inc.

Struik, D.J. (1987). *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva - Publicações Lda.

Paulo Alvega
Esc. Sec. Padre Alberto Neto
Queluz

ICME 8
SEVILLA 1996

8º Congresso Internacional de Educação Matemática

14 a 21 de Julho de 1996

Transcrevemos partes do texto incluído no primeiro anúncio deste importante Congresso:

O Comité Nacional Espanhol do 8° Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME-8) em nome da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) e da Federação Espanhola de Sociedades de Professores de Matemática, tem o prazer de anunciar que o referido Congresso terá lugar em Sevilha, Espanha, de 14 a 21 de Julho de 1996. Os anteriores ICME'S tiveram lugar em Lyon (França), Exeter (Reino Unido), Karlsruhe (Alemanha), Berkeley (USA), Adelaida (Austrália), Budapeste (Hungria) e Quebec (Canadá) sob os auspícios da ICMI, uma Comissão da União Matemática Internacional (IML).

O ICME-8 pretende continuar esta série de Congressos com o objectivo de ampliar o desenvolvimento da educação matemática para melhorar a aprendizagem e o ensino da Matemática. Convidamo-lo a participar no ICME-8, em cujo programa se incluirá uma ampla variedade de actividades científicas e um vasto programa cultural e social para os congressistas e acompanhantes, e onde terá a oportunidade de trocar opiniões e discutir novas ideias sobre os itens da educação matemática, num contexto internacional.

Programa

O ICME-8 conterá um rico programa científico que cobrirá as mais importantes áreas da educação matemática e fará frente aos cruciais problemas que possam ser de interesse para os 3500-4000 participantes que esperamos participem neste Congresso.

As principais actividades incluirão Conferências plenárias e ordinárias, Grupos de Trabalho, Grupos Temáticos, Mesas Redondas, Apresentações Nacionais, Comunicações breves e Projectos. Haverá também exposições de livros, software e diversos materiais para o ensino. Os Grupos de Estudo do ICMI e os organizadores dos distintos Seminários do ICMI contribuirão no programa apresentando relatórios sobre as suas actividades. Também se realizarão encontros especiais (Assembleia do ICMI, Associações, Revistas, etc.). Cada participante receberá um exemplar das Actas do Congresso.

As línguas oficiais do Congresso serão a Espanhola e a Inglesa. Não obstante, a maioria das sessões realizar-se-ão em inglês. Distintas informações, serviços e traduções estarão disponíveis em outras linguas.

No boletim APM Informação nº 22 sairam algumas informações sobre este Congresso. A direcção da APM tem estado em contacto com a Sociedade Andaluza de Educação Matemática THALES no sentido de conseguir condições especiais de inscrição. Quando esta revista for distrubuída, muito provavelmente já existem novas informações. Contacte a sede da APM ((01) 7166424)