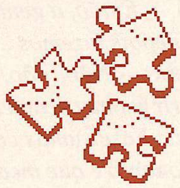


O problema do trimestre

Sobre o problema anterior

O problema proposto para o trimestre que passou tinha a ver com o jogo dos *Sprouts*, apresentado na secção *Vamos jogar*. Relembremos as regras:

– Marcam-se alguns pontos numa folha de papel.

– Cada jogada consiste em traçar uma linha de um ponto para outro ou para o próprio ponto, colocando um novo ponto algures nessa linha.

– A linha pode ter qualquer forma mas não pode cruzar-se consigo própria nem com outra linha já existente, nem pode passar por qualquer ponto que já faça parte do jogo.

– De um ponto não podem sair mais de três linhas.

– Os jogadores jogam alternadamente, ganhando quem fizer a última jogada.

As questões propostas foram estas:

1) Se o número inicial de pontos for ***n****, qual é o número máximo de jogadas possível?*

2) E o número mínimo?

3) Se o número inicial de pontos for 2, qual dos jogadores, o primeiro ou o segundo tem uma estratégia vencedora, isto é, pode ganhar sempre, qualquer que seja a forma como o adversário jogue?

Grande (e triste) surpresa este trimestre! Ninguém respondeu!

Onde estão os apaixonados pelo jogo? Por onde andam os entusiastas da resolução de problemas? Que terá acontecido para que nem um dos habituais "clientes" desta secção tenha enviado uma resposta? Será que os que gostam de jogar não apreciam a resolução de problemas, e vice-versa? Não pode ser. Não acredito. É um mistério!

Mas pronto.

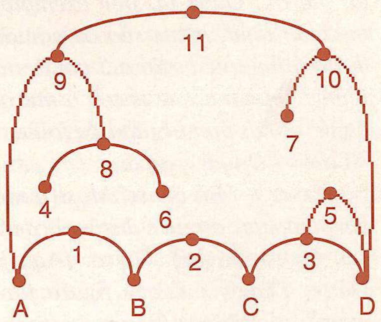
Vamos então ao problema.

1) No início do jogo, cada ponto tem três "ramos livres", ou seja, de cada ponto vão poder sair ou chegar três linhas. Como há **n** pontos, há **3n** ramos livres.

Cada jogada faz desaparecer dois ramos livres mas cria um ponto com um ramo livre. Portanto, em cada jogada, o total de ramos livres decresce de uma unidade.

O jogo termina obrigatoriamente quando há apenas um ramo livre, visto serem preciso dois para se fazer uma jogada. O máximo de jogadas é portanto de **3n–1**.

Se começarmos com 4 pontos podem fazer-se 11 jogadas no máximo, como se pode verificar neste exemplo. Os pontos A, B, C e D são os iniciais e os outros estão numerados de acordo com a ordem de aparecimento no jogo.



2) Quando se faz o máximo de jogadas, fica um único ponto com um ramo livre. Foi o que aconteceu no desenho anterior: todos os pontos têm três ramos, excepto o último, o 11, que só tem dois.

Para se chegar ao mínimo de jogadas temos de tentar obter o maior número possível de pontos com um ramo livre.

Problema proposto

BODAS DE OURO

Os meus pais vivem numa casa rodeada de um pequeno pomar.

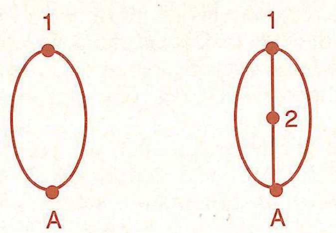
Para comemorar as bodas de ouro deram uma festa onde juntaram os 9 filhos e os 31 netos.

Resolveram também distribuir pelos netos as 470 romãs que tinham colhido no pomar. Cada rapariga recebeu mais 7 romãs que cada rapaz (e ninguém soube explicar esta preferência pelas raparigas...).

Ao chegar a casa reparei que os meus miúdos (rapazes e raparigas) tinham trazido um total de 74 romãs. Quantas filhas tenho eu?

Estes pontos têm, é claro, de estar isolados uns dos outros, para não se poderem ligar entre si.

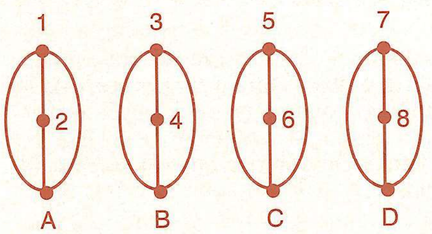
Ora há um processo de se conseguir um ponto isolado só com dois ramos a partir de cada ponto inicial. Por exemplo, a primeira jogada é ligar o ponto A a si próprio, criando o ponto 1. Na segunda jogada liga-se 1 com A pelo interior. O novo ponto 2 fica isolado do resto dos pontos iniciais, enquanto que o A e o 1 ficam completos.



1ª jogada   2ª jogada

Assim, em duas jogadas eliminámos toda a "capacidade geradora" do ponto inicial A. Podemos fazer o mesmo para os restantes pontos iniciais e o jogo acaba ao fim de **2n** jogadas.

Eis um exemplo para 4 pontos iniciais. O jogo termina ao fim de 8 jogadas, apesar de haver ainda 4 pontos só com dois ramos.



3) Vejamos agora, começando com **dois** pontos, quem pode ganhar sempre o jogo desde que jogue bem.

O máximo de jogadas é $2\times3-1 = 5$.

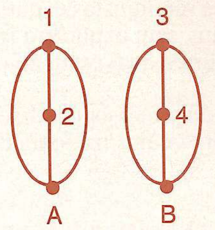
O mínimo de jogadas é $2\times2 = 4$.

O segundo jogador só ganha quando o número de jogadas é par, portanto 4 neste caso. Para isso terá de criar um segundo ponto com dois ramos livres. Se o conseguir sem que o primeiro jogador o possa evitar, ganha sempre.

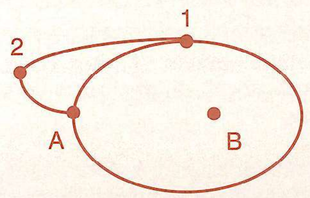
Ora realmente isso é possível. Vejamos como.

Na primeira jogada, o primeiro jogador tem três hipóteses.

I) Se ligar o ponto A a si próprio, o segundo jogador liga o novo ponto 1 ao ponto A pelo interior da zona fechada. O ponto criado 2 fica isolado do resto do jogo. A 3ª e 4ª jogadas são obrigatórias e o segundo jogador ganha.

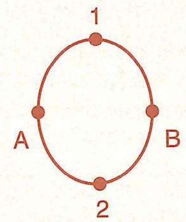


II) Se na primeira jogada o ponto A for ligado a si próprio envolvendo B, a situação é equivalente a I, bastando o segundo jogador ligar A com 1 pela parte de fora.

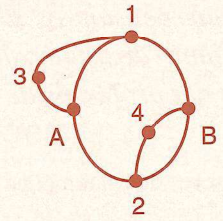


A terceira e quarta jogadas terão de ser feitas na zona fechada e a vitória vai para o segundo jogador.

III) Se a primeira jogada for ligar A com B, o segundo jogador liga também A com B. Criam-se assim duas zonas separadas, ficando os 4 pontos todos com um ramo livre.



O primeiro jogador tem de ligar depois dois quaisquer dos pontos por uma das zonas. Então, o segundo jogador liga os outros dois pontos através da zona contrária. Os dois novos pontos criados não se podem ligar entre si e o primeiro jogador perde.



Algumas considerações mais

Este jogo foi inventado em 1967 conjuntamente por John Conway, professor de Matemática na Universidade de Cambridge e Michael Paterson, que fazia uma pós-graduação na mesma universidade.

A análise do jogo com 3 pontos de partida é um pouco mais complicada, mas está ao alcance de um jogador mais interessado. Conway mostrou que o primeiro jogador pode ganhar sempre.

Segundo conta Martin Gardner em "Mathematical Carnival", Denis Mollison, um estudante daquela universidade, demonstrou que é também o primeiro jogador quem tem a estratégia ganhadora quando se começa com 4 ou com 5 pontos.

Mollison apostou depois com Conway que era capaz de descobrir a estratégia vencedora para 6 pontos iniciais em menos de um mês.

Ganhou a aposta publicando um artigo de 49 páginas em que mostra que é o segundo jogador que está em vantagem.

Para 7 e 8 pontos, Gardner diz não saber quem tem vantagem, apesar de já terem sido feitos vários estudos. Na opinião de Conway, a análise do jogo com 8 pontos iniciais ultrapassa a capacidade dos computadores actuais.

Uma variante

O jogo tem uma variante que mantém todas as regras excepto uma:

- perde quem fizer a última jogada.

Este jogo está estudado até aos 4 pontos iniciais. A partir daí ninguém sabe qual dos jogadores está em vantagem.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Carnide)