O problema do trimestre

Sobre o problema anterior

Para este trimestre foi proposto "Um problema com senos":

"Vamos escolher um ponto sobre o gráfico do seno, traçar a tangente nesse ponto, e observar em quantos pontos a tangente toca o gráfico.

Será possível determinar, dado um ponto qualquer do gráfico, em quantos pontos a recta tangente nesse ponto toca o gráfico do seno?"

Este problema era sem dúvida mais difícil que o habitual, o que deve ter inibido os habituais entusiastas desta secção. Só nos chegaram três respostas: Ana Luisa Correia (Lisboa), Judite Barros (Lisboa) e Orlando Freitas (Funchal). É a primeira que aqui reproduzimos, com ligeiras alterações de pormenor.

Seja **a** a abcissa do ponto onde se traça a tangente ao gráfico de sen x.

Se $\mathbf{a} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro, há uma infinidade de intersecções.

Se $\mathbf{a} = k\pi$, com k inteiro, há apenas uma intersecção.

Se **a** pertence a $]0, \frac{\pi}{2}[$, a equação da tangente é

$$y = x \cos a + \operatorname{sen} a - a \cos a$$

Designemos a tangente por **t**.

– **t** não intersecta o gráfico em pontos de abcissa maior que **a**.

– Dos pontos de abcissa menor que **a** em que a tangente ao gráfico é paralela a **t**, o que tem maior abcissa é **–a**.

Consideremos a seguinte sucessão de abcissas e respectivas tangentes:

$x_1 = -a \qquad t_1$

$x_2 = -a - 2\pi \qquad t_2$

$x_3 = -a - 4\pi \qquad t_3$

...

$x_n = -a - 2(n-1)\pi \qquad t_n$

Se t_n estiver acima ou coincidente com t, não haverá intersecções em pontos de abcissa superior x_n.

Seja então **m** o menor **n** tal que t_n está acima ou coincide com **t**.

As abcissas dos pontos de intersecção estão em $[x_m, a]$ e distribuídas assim:

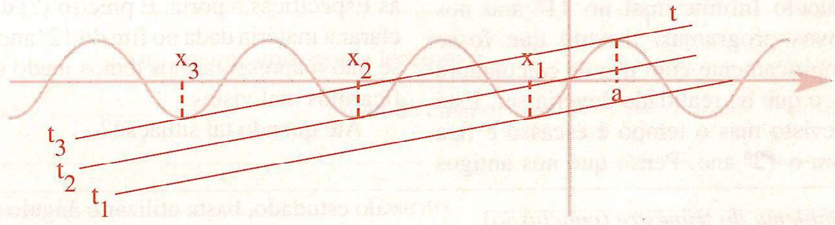
- 1 em $\{a\}$
- 0 em $[x_1, a[$
- 2 em $[x_2, x_1[$
- 2 em $[x_3, x_2[$
- ...
- 2 em $[x_{m-1}, x_{m-2}[$
- 2 (se t_m coincidente com t) ou 1 (se t_m acima de t) em $[x_m, x_{m-1}[$.

Mas t_m coincide com t quando o ponto $(x_m, \operatorname{sen} x_m)$ pertence a t, e t_m está acima de t sse o seno de x_m é maior que a ordenada do ponto de t que tem abcissa x_m. Assim **m** será o menor inteiro que verifica:

$$\operatorname{sen} x_m \geq x_m \cos a + \operatorname{sen} a - a \cos a$$

o que é equivalente a

$$n \geq 1 + \frac{1}{\pi}(\operatorname{tg} a - a) \qquad (1)$$



(continua na pág. 36)

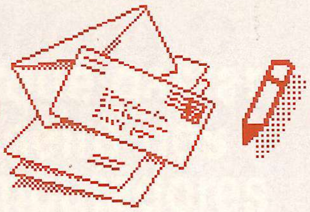
Problema proposto

O JOGO DOS *SPROUTS*

A secção **Vamos jogar** deste número de **Educação e Matemática** propõe o jogo dos *Sprouts*.

Depois de terem lido essa secção e experimentado o jogo, propomos as seguintes questões sobre ele:

- Se o número de pontos inicial for **n**, qual é o número máximo de jogadas possível?
- E o número mínimo?
- Se o número inicial de pontos for 2, qual dos jogadores, o primeiro ou o segundo, tem uma estratégia vencedora, isto é, pode ganhar sempre, qualquer que seja a forma como o adversário jogue?



Pontos de vista, reacções, ideias...

Da Madeira, chegaram-nos dois comentários do colega José Orlando de Freitas, da Escola Secundária Francisco Franco: um deles é um comentário sobre a importância da introdução ao Cálculo Infinitesimal no Ensino Secundário, o outro é uma resposta ao desafio lançado por Luis Carmelo num dos últimos números da revista.

$\lim_{x \to 12^{o} ano} (\textit{novos programas}) = \textit{erros dos programas antigos}$

Na minha escola, já vamos no quarto ano consecutivo dos novos programas e, infelizmente, nunca se deu a introdução aos limites e derivadas no 11º ano como previsto nos programas oficiais.

Já é do nosso conhecimento que se certas estruturas matemáticas não forem desenvolvidas na devida altura, será muito mais difícil aprendê-las mais tarde. Como exemplo flagrante, temos o que se passa com os alunos que não aprendendo as operações aritméticas elementares no 1º ciclo, muito dificilmente as aprenderão mais tarde e muito menos em adultos. Penso que se passa algo semelhante com a não introdução ao Cálculo Infinitesimal no 11º ano nos novos programas, mesmo que fosse empiricamente com uso de calculadora — o que na realidade deveria ser. Está previsto mas o tempo é escasso e fica para o 12º ano. Penso que nos antigos também acontecia o mesmo mas um pouco mais disfarçado, em que se davam as derivadas muito precariamente e sempre à velocidade de ponta da "fórmula um" e sem medo das amolgadelas que fazemos nos cérebros dos alunos.

E agora, com as Provas Globais, ainda serão maiores os atrasos do 10º ano, e por aí adiante nos próximos anos, o que nos levará a que num futuro próximo as aulas de Matemática, principalmente as do 12º ano, sejam pura e simplesmente o ditar de resultados; o que já vai acontecendo. Pois o que defendemos, em maioria, é que o programa tem de ser dado, porque no fim do 12º ano os alunos têm as Específicas à porta. É preciso (?) declarar a matéria dada no fim do 12º ano e se não o apresentarmos temos medo de ficarmos mal vistos.

Até quando tal situação?

Problema do trimestre (conclusão)

Se **a** pertence a $]-\frac{\pi}{2},0[$ e constituirmos a sucessão $x_n=-a+2(n-1)\pi$, por um raciocínio análogo ao anterior obtemos:

$$n \geq 1 + \frac{1}{\pi}(a - \text{tg } a) \qquad (2)$$

Juntando (1) e (2) temos:

$$n \geq 1 + \frac{1}{\pi}|\text{tg } a - a|$$

Dadas as simetrias do gráfico da função seno, quando **a** não pertence ao intervalo estudado, basta utilizar o ângulo $\mathbf{a_0}$ deste intervalo cujo seno é igual ao de **a**.

Para determinar o número de intersecções de **t** com o gráfico calculamos

$$y = 1 + \frac{1}{\pi}|\text{tg } a_0 - a_0|$$

e seja C(y) a característica de y.

– Se y é inteiro, o número de intersecções é **2y–1**.

– Se y não é inteiro, o número de intersecções é **2C(y)**.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Carnide)

Resposta ao "Não é imediato, isso não é...*" de Luis Carmelo (Educação e Matemática nº28)

(*) A frase refere-se à demonstração de que: *Seja (U_n) uma sucessão de números reais, tal que a subsucessão dos termos de ordem par é crescente e a subsucessão dos termos de ordem ímpar é decrescente. (U_n) é monótona?*

Quando se trata de trabalhar com o infinito não é para brincadeiras, pois a nossa intuição, muitas vezes, nos engana. Mas penso que a demonstração, usando a redução por absurdo, não é assim tão difícil, como indicada.

Demonstração:

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, tal que $u_{2(n+1)} > u_{2n}$ e $u_{2n+1} < u_{2n-1}$, $\forall n \in N$

(1) Suponhamos que (u_n)é crescente. Teríamos:

$$u_{2(n+1)} > u_{2n+1} > u_{2n} > u_{2n-1}, \quad \forall n \in N$$

e viria $u_{2n+1} > u_{2n-1}$, $\forall n \in N$, o que é absurdo

(2) Suponhamos que (u_n)é decrescente. Teríamos:

$$u_{2(n+1)} < u_{2n+1} < u_{2n} < u_{2n-1}, \quad \forall n \in N,$$

e viria $u_{2(n+1)} < u_{2n}$, $\forall n \in N$, o que é absurdo

Nota da Redacção: A Redacção reserva-se o direito de editar as cartas e outros pequenos textos recebidos, de modo a tornar comportável a inclusão de todas as contribuições recebidas no espaço disponível na revista.