Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? Talvez um dia...

Paulo Abrantes

Em vários países, tópicos de Matemática Discreta, como problemas combinatórios, grafos e matrizes, começaram a ser considerados nos programas escolares, tanto ao nível do ensino básico como do secundário. Em Portugal, nem por isso... Mas talvez seja útil que comecemos a discutir uma questão de indiscutível actualidade.

No nº 29 da revista *Educação e Matemática* dois artigos focam a importância nos nossos dias e o potencial interesse educativo de tópicos de Matemática Discreta, nomeadamente ligados à Teoria dos Grafos, que nunca fizeram parte dos programas de Matemática do ensino não superior nem foram considerados no âmbito da nova reforma.

Candelaria Espinel Febles, no artigo "Matrizes por detrás das redes", mostra como as redes e as matrizes permitem abordar problemas actuais da realidade numa perspectiva de modelação matemática. Cecília Perdigão, em "Um breve olhar sobre os grafos", argumenta que vários tópicos da Teoria dos Grafos poderiam com vantagem ser considerados nos programas de Matemática do ensino secundário, atendendo às suas inúmeras aplicações, à simplicidade dos conceitos envolvidos e ao seu potencial para desenvolver aspectos da resolução de problemas como a visualização de situações e a esquematização de raciocínios.

O NCTM, nas *Normas* (1989/1991), propõe a inclusão de tópicos de Matemática Discreta nos currículos. A Norma 12 para os níveis de escolaridade do 9º ao 12º anos refere que devem ser proporcionadas a todos os alunos actividades como a representação de situações problemáticas através de grafos, matrizes, sucessões e relações de recorrência, a construção e análise de algoritmos ou a resolução de problemas envolvendo contagens e probabilidades finitas. Para as *Normas*, a Matemática Discreta diz respeito às propriedades matemáticas de conjuntos e sistemas numeráveis, e o seu estudo é indispensável no mundo do processamento da informação e na resolução de problemas que envolvam métodos computacionais. O NCTM argumenta que "os computadores são essencialmente máquinas finitas e discretas" que vêm exercendo uma influência crescente nos modos de criar e usar a Matemática.

Na Holanda, a última reforma dos programas para o ciclo inicial do secundário (alunos dos 12 aos 16 anos) assumiu uma perspectiva muito crítica face aos "velhos programas" — que promoviam um ensino formal baseado na teoria dos conjuntos — e adoptou uma abordagem que valoriza o papel da Matemática na interpretação e resolução de problemas da realidade. G. van den Heuvel e H. Krabbendam (1991) explicam como essa abordagem conduziu à opção de "incluir elementos de Matemática Discreta como uma parte substancial do programa para alunos de 12-16 anos". A importância crescente na sociedade de problemas matemáticos envolvendo "redes" (relacionados por exemplo com questões de trânsito ou de comércio, implicando problemas de optimização e de tomada de decisões), assim como o valor do *raciocínio combinatório* presente em muitas situações em que é preciso fazer contagens de um modo organizado, levou-os a considerar que: (i) os grafos podem constituir um ponto de partida para visualizar e criar modelos de situações; (ii) a compreensão (não a execução) de algoritmos é um aspecto relevante que se segue à criação de um modelo; e (iii) o raciocínio ligado aos problemas combinatórios é um apoio essencial à compreensão desses algoritmos.

No nosso país, não há tradição de ensino destes tópicos que não foram sequer considerados nos novos programas. É certo que, no caso do 3º ciclo do ensino básico, nota-se alguma sensibilidade para a ideia de valorizar o estudo de relações e sequências envolvendo os números naturais, uma ideia que poderia dar corpo a uma nova área nos programas, continuando-se com problemas combinatórios e com outros tópicos de Matemática Discreta. No entanto, isso não sucede. O cálculo combinatório surge apenas no final do secundário (passou mesmo do 11º para o 12º ano) e é apresentado nessa altura de um modo formal, ligado aos arranjos e combinações. Outros tópicos, como os grafos e as matrizes, nem sequer são considerados.

A experiência do Projecto MAT789

O currículo experimental que o Projecto MAT789 desenvolveu entre 1988 e 1992 incluiu vários tópicos de Matemática Discreta. Uma das inovações foi a introdução de uma unidade de "Problemas de Contagem" no 7º ano. Os alunos exploraram diversas situações da realidade que envolviam processos de contagem, como por exemplo:

• um estudo sobre o código Morse (usando apenas pontos e traços, quantas letras podem ser representadas com dois, três, quatro... sinais?);

• um estudo sobre o sistema de apostas múltiplas do Totobola (a quantas apostas simples correspondem duas triplas, ou três duplas, ou... ?).

Estes problemas foram abordados de uma forma experimental, utilizando-se materiais e dando-se prioridade à construção de processos organizados de contagem. A continuação consistiu no estudo de situações como a organização de calendários para torneios desportivos (por exemplo, quantos jogos haverá numa prova com um certo número de equipas do tipo campeonato a uma volta?) e na resolução de outros problemas combinatórios (por exemplo, quantos apertos de mão haverá entre quatro pessoas se todas se cumprimentarem umas às outras?). Note-se que não houve qualquer preocupação de introduzir aspectos formais ligados ao cálculo combinatório. Em termos conceptuais, procurou-se apenas destacar o papel de um princípio fundamental neste domínio: a regra do produto. Um trabalho particularmente significativo que os alunos fizeram nesta altura foi um estudo sobre as possibilidades e limitações dos sistemas de matrículas de automóveis usados em vários países.

Há alguma evidência de efeitos positivos do contacto dos alunos com este tipo de problemas. As vantagens dizem respeito à experiência com situações que envolvem um raciocínio combinatório e não à aprendizagem de regras para resolver certos tipos de problemas. Um dos nossos alunos, no fim do 7º ano, declarou que havia apreciado especialmente "o Totobola e a Geometria por causa das *mentalidades* que era preciso usar", lembrando-se provavelmente das contagens de vértices e arestas em vários sólidos e estabelecendo uma curiosa relação entre dois tópicos aparentemente tão diferentes. Uma aluna de uma destas turmas, dois anos mais tarde, argumentou com um colega que o produto de dois trinómios iria dar lugar a 9 termos (e não a 6 como o colega dizia) porque "é exactamente como duas triplas do Totobola que são 9 apostas e não 6".

Para o 9º ano, o Projecto MAT789 preparou uma unidade sobre Grafos e Matrizes que foi trabalhada apenas numa das turmas experimentais mas forneceu indicações interessantes.

Grafos e matrizes no 9º ano

O ponto de partida foi a ficha de trabalho "Passeio pelas ilhas" (Fig. 1) inspirada na brochura "Graafwerk" que a experiência holandesa atrás referida produzira em 1989. Seguindo a opção dos holandeses, começou-se por uma situação de natureza geográfica que, em princípio, é mais concreta e sugestiva relativamente ao uso dos grafos. A última questão da ficha procurava, no entanto, iniciar uma reflexão sobre a diferença entre um mapa e um grafo como modelos de uma situação.

A proposta de trabalho seguinte consistiu basicamente na ficha de trabalho intitulada "Torneio de Voleibol" que se

Passeio pelas ilhas

Imagina que o avião te leva até à ilha Terceira e, aí, consultas uma tabela com as ligações de barco (ida e volta) disponíveis naquela época entre as ilhas do grupo central dos Açores.

Terceira - Faial
Terceira - Graciosa
Faial - Pico
Faial - S. Jorge
S. Jorge - Graciosa

1. Planeia um passeio pelas ilhas, à tua escolha. Começa e acaba na Terceira porque é aí que o avião aterra e descola.

2. Imagina agora que querias visitar todas as ilhas mas indo a cada uma delas apenas uma vez. Será possível? Se sim, como ? Se não, que novas ligações deveriam ser acrescentadas para que tal fosse possível?

3. Qual será o menor número de ligações de barco para que um passeio como aquele que é sugerido em 2 seja possível?

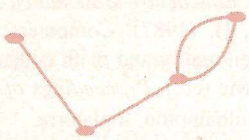
4. Poderias responder às questões anteriores sem o mapa? Comenta esta questão.

Fig. 1 - Ficha de trabalho nº1 da unidade "Grafos e Matrizes" (Projecto MAT789, 1991-92).

reproduz neste número da Revista, na secção *Materiais para a aula de Matemática*. A ideia era retomar a abordagem de problemas combinatórios iniciada em anos anteriores mas relacionando-a agora com o uso dos grafos como forma de representar uma situação. Por outro lado, esta ficha constituia um complemento da anterior no sentido em que, abandonando as situações geográficas, poderia contribuir para se caminhar em direcção a uma noção mais abstracta de grafo.

O terceiro grupo de actividades introduzia, de um modo informal, a noção de grafo e procurava relacioná-la com as situações exploradas anteriormente:

"Um grafo é um esquema constituído por vários pontos e ligações entre alguns deles.



Num grafo, não importa a precisão dos locais onde são colocados os pontos, apenas interessa o número de pontos e as ligações entre eles.

Também se usam os nomes de vértices (para os pontos) e arestas (para as ligações).

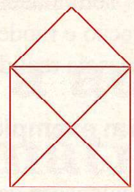
1. Indica o que são os pontos e o que são as ligações no caso
a) do passeio pelas ilhas;
b) do torneio de voleibol.
(...)"

Este grupo de actividades incluía depois questões sobre grafos idênticos (embora aparentemente muito diferentes), explorações em torno de problemas conhecidos (ver Fig. 2) e ainda referências a problemas clássicos como o das pontes de Konigsberg que o matemático alemão Euler terá estudado usando processos de raciocínio relevantes na Teoria dos Grafos.

Seguiu-se o Jogo dos *Sprouts*, uma actividade que proporciona a procura de estratégias ganhadoras num jogo que decorre num "ambiente de grafos" (ver a secção *Vamos Jogar* deste número da Revista).

A transição para as matrizes e a sua relação com os grafos foram estabelecidas

Desenha esta "casa" sem levantares o lápis do papel e sem passares mais do que uma vez por cada linha.
Pode-se começar e terminar num ponto qualquer?
Comenta.



Se a casa não tivesse "telhado", o problema anterior seria ainda possível?
Haverá alguma relação entre este problema e o número de arestas que sai de cada ponto?
Arranja mais alguns exemplos à tua escolha e comenta a questão.

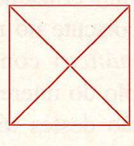


Fig. 2 - Exemplos de actividades de exploração propostas a alunos do 9º ano no âmbito da unidade "Grafos e Matrizes" (Projecto MAT789, 1991-92).

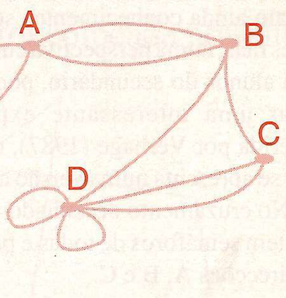
a partir de uma ficha de trabalho em que se explorava uma situação que podia ser representada por ambos os processos.

A ficha foi adaptada de uma ideia de Glidden (1990). Partia-se de uma situação em que quatro miradouros e os caminhos entre eles eram representados por pontos e linhas respectivamente. Depois, propunha-se uma representação através de uma tabela de duas entradas, na qual se indicava o número de "caminhos directos" entre cada par de pontos, e (de um modo mais simplificado) através de uma matriz (Fig. 3).

Questões sobre o significado, na situação real, da soma dos elementos de uma linha, de uma coluna e de toda a matriz ajudaram a dar sentido a esta nova forma de representação e a relacioná-la com a anterior.

Um prolongamento possível consiste em considerar que alguns caminhos só podem ser percorridos num sentido e em refazer a actividade neste pressuposto, o que corresponde a trabalhar com a ideia de "grafos direccionados".

Finalmente, o uso de matrizes numa situação da realidade, em que a soma de matrizes e o produto de um número por uma matriz adquirem um significado concreto, foi introduzido aos alunos através de uma ficha de trabalho intitulada "Matrizes num fim-de-semana...", que se reproduz na secção *Materiais para a aula de Matemática*. Esta ficha foi concebida pela equipa do Projecto MAT789 e constituiu a última actividade da unidade "Grafos e Matrizes".



$$\begin{array}{c|c} \text{de} \backslash \text{para} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Fig. 3

A experiência revelou-se muito encorajadora quanto às "potencialidades curriculares" no 9º ano — ou até mais cedo como propõem Hart, Maltas e Rich (1990) — de um tema que é muito pouco exigente do ponto de vista dos pré-requisitos necessários e que, ao mesmo tempo, é susceptível de proporcionar aos alunos actividades interessantes de investigação e modelação no contexto de situações da realidade.

Um exemplo significativo

A colocação de um sistema de semáforos num cruzamento (que Cecília Perdigão discute no nº 29 de *Educação e Matemática*) constitui um excelente exemplo do interesse que poderia ter a inclusão destes tópicos nos currículos escolares. A situação, de resto, inspirou o concurso "Matemática & Realidade" que o Projecto MAT789 promoveu há dois anos (Abrantes, 1992). O problema dirigiu-se a alunos do 9º ano que não tinham ainda conhecimentos sobre matrizes mas, numa perspectiva curricular e com alunos do secundário, poderia originar uma interessante exploração sugerida por Verhage (1987), que a seguir se apresenta numa versão adaptada:

No cruzamento desenhado na Fig. 4 existem semáforos de todas e para todas as direcções A, B e C.

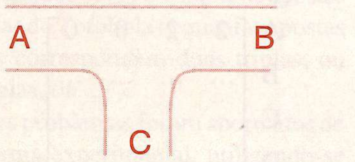


Fig. 4

A matriz L indica o número médio de carros que durante uma determinada hora do dia circulam nas várias direcções:

$$L = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \end{array} \\ \text{de} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 515 & 811 \\ 613 & 0 & 182 \\ 390 & 574 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{para} & \begin{array}{ccc} A & \quad B & \quad C \end{array} \end{array}$$

Por exemplo, circulam 515 carros de A para B, 182 carros de B para C, 574 carros de C para B, etc.

As matrizes M_1, M_2 e M_3 indicam o tempo (em minutos) durante o qual cada um dos semáforos está aberto de cada vez (àquela hora):

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por exemplo: durante 1 minuto estão verdes os semáforos A —> B, A —> C e B —> A; em seguida, estão verdes durante meio minuto B —> A, B —> C e C —> B; etc.

1. Constrói a matriz $M = M_1 + M_2 + M_3$. Que significa M na situação real?

2. Constrói a matriz 30M. Que significa 30M na situação?

3. Enquanto um sinal está verde passam 20 carros por minuto. Constrói a matriz que indica o número total de carros que podem passar em cada direcção durante uma hora.

4. Compara a matriz construída em 3 com a matriz inicial L. Achas que deveriam ser modificados os tempos de abertura dos vários semáforos? Que mudanças proporias em M_1, M_2 e M_3?

5. Faz uma apreciação crítica desta forma de *matematizar* a organização do trânsito naquele cruzamento.

Para responder a estas questões, é preciso saber como se somam duas matrizes e como se multiplica um número por uma matriz. Mas isso é fácil e pode ser explicado com um exemplo simples (veja-se a ficha de trabalho "Matrizes num fim-se-semana" na secção *Materiais para a aula de Matemática*).

O uso de um computador para simular a situação, estudando-se os efeitos de diversas modificações no sistema, poderá enriquecer muito a actividade e ajudar a centrar a atenção no uso e crítica do modelo matemático presente.

Referências:

Abrantes, P. (1992). Pode-se aprender na escola a usar a Matemática em problemas da vida real? *Educação e Matemática 23*, 25-29.

Febles, C. E. (1994). Matrizes por detrás das redes. *Educação e Matemática 29*, 3-5/10.

Glidden, P. (1990). From graphs to matrices. *Mathematics Teacher*, Feb. 90, 127-130.

Hart, E. W., Maltas, J. & Rich, B. (1990). Teaching discrete mathematics in grades 7-12. *Mathematics Teacher*, May 90,362-367.

Heuvel, G. van den & Krabbendam, H, (1991). Introducing discrete graphs to 12 year olds. Em Mogens Niss et al. (eds), *Teaching of mathematical modelling and applications*, 158-169. Chichester: Ellis Horwood.

NCTM (1991). Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar. APM.

Perdigão, C. (1994). Um breve olhar sobre os grafos. *Educação e Matemática 29*, 19-20.

Verhage, H. (1987). Computers, a bridge between reality and math education? Em P. Bowie (ed.), *Proceedings of CIEAEM 38*, Southampton, Inglaterra.

Paulo Abrantes
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências de Lisboa

Materiais para a aula de Matemática

As duas fichas de trabalho que se reproduzem a seguir integraram a unidade sobre Grafos e Matrizes que o Projecto MAT789 desenvolveu numa turma experimental do 9º ano em 1992. Os seus objectivos e a sequência em que foram usadas estão explicados no artigo acima. Mas, mesmo noutro contexto, elas podem proporcionar interessantes actividades de exploração a alunos do 3º ciclo do Ensino Básico.

O mesmo se aplica ao jogo dos *Sprouts*, incluído na secção *Vamos Jogar*, o qual poderá ainda suscitar a discussão de estratégias ganhadoras e de problemas como o de tentar descobrir se existe um número máximo de jogadas e, em caso afirmativo, qual é esse número (a este respeito ver ainda a secção *O problema do trimestre*).