Uma experiência com calculadoras gráficas

António Abrantes

Que sentido tem que os nossos alunos continuem a cavar pletoricamente matemática a lápis e papel, recordando a nossa luta, a dos menos novos, com as tábuas de logaritmos e de algoritmos lançados para a Torre dos Tombos Matemáticos?

Numa fria manhã entre 4 e 7 de Novembro de 1992 entrei na Escola Alves Martins para um ProfMat importante, não tão turístico como o dos Açores, sem Atlântico pelo meio, após uma breve estrada de 35 minutos entre Seia a Viseu. Vi uma feira grande de grandes coisas e estava com o seu estaminé montado um cavalheiro falando em espanholiano a lançar num écran umas figurinhas muito interessantes a partir de um retroprojector telecomandado por uma coisa que parecia ser uma calculadora. Ele apresentava coisas que me pareciam ser funções trigonométricas, para segundos depois já ser um logaritmo a espreguiçar-se, uma expressão numérica logo de seguida. Isto parecia ser uma coisa divertida.

No piso de cima estavam umas colegas (mandava aqui um piropo, mas não fica bem) com um trabalho sobre calculadoras gráficas e funções no Secundário.

Desci e fui comprar um brinquedo, uma calculadora gráfica TI- 85. Vim para casa e brinquei. Parecia um garotito com um arco novo (no meu tempo os brinquedos eram esses). Começa aqui a minha experiência com calculadoras gráficas.

Ainda em Viseu, comprei a bíblia NORMAS para o currículo e a avaliação em Matemática Escolar e onde vi, li coisas que me diziam muito respeito e comecei a alimentar a ideia de introduzir a calculadora gráfica nas minhas aulas. Como era impensável que todos os alunos tivessem um brinquedo daqueles, pedi e consegui que a escola adquirisse um viewscreen equipado com a máquina mais barata, uma TI-81 e ainda mais uma máquina simples também TI-81. (Juro que não recebo quaisquer luvas da Texas Instruments).

Sentia a frigidez dos números, a falta de senso de certos resultados obtidos, o oco da sua e nossa matemática, o amorfismo dos conhecimentos que a maior parte dos nossos alunos transportam que nos poderia levar a que o Sol estivesse mais perto de Seia que a Marinha Grande. Alguns campeões a resolver equações do 2° grau pela fórmula resolvente não são capazes de transportar essa informação para um gráfico de função quadrática, pode saber-se que para ver se uma função é par ou ímpar se faz a substituição de x por -x mas se lhe apresentar um gráfico perfeitamente simétrico em relação ao eixo dos yy não lhe diz nada a expressão "função par". Por várias vezes, temos a sensação de que estamos a treinar papagaios analíticos que, perante estimulações do tipo resolve a equação, salivam e regorgitam umas coisas esquisitas que não se entendem mas que é a reacção que tem pontos nos testes.

A Matemática povoada de gráficos sempre me pareceu mais compreensível e durável que a Matemática simbólica. Para quê fixar páginas de texto para recitar as características de uma função? Dá mais rendimento fixar gráficos. Desde que os consiga ler, terei sempre à

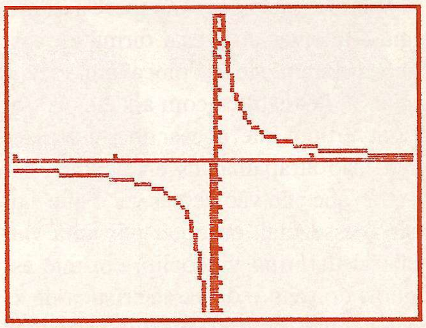


Gráfico da função y=1/x desenhado por uma calculadora, modelo TI-81 disposição a propriedade que me interessa. Talvez tenhamos que pensar em operações de marketing para a Matemática.

Que sentido tem que os nossos alunos continuem a cavar pletoricamente matemática a lápis e papel, recordando a nossa luta, a dos menos novos, com as tábuas de logaritmos e de algoritmos lançados para a Torre dos Tombos Matemáticos. Há grandes tractores matemáticos que os alunos mais velhos deverão conhecer mesmo que o programa os não contemple. Dá a impressão que os doentes antigos não podem usufruir de medicamentos recentemente saídos dos laboratórios apenas destinados a doentes novos, mesmo que a doença seja a mesma. Parece que não é mesmo só impressão...

Reconheço que os meus alunos ainda têm que prestar provas em que o analítico é rei, mas ..

Decisão

No ano lectivo de 1993/94, são me entregues na Escola Secundária de Seia duas turmas, uma do 11° ano e outra do 12° ano, esta em curso nocturno. A turma do 11° ano é constituída por alunos com quem já tinha trabalhado no 10º ano e fora considerada bastante fraca nas diferentes disciplinas de qualquer uma das componentes geral, específica e vocacional, não só comparada com outras turmas da mesma área de estudos, como em classificações absolutas. As notas positivas que existiam no final do 10º ano eram classificações que se distribuíam de 10 a 13, com predomínio da metade inferior e o número de alunos que reprovaram, pelo menos, a uma disciplina, era bastante significativo.

Passei a questionar-me sobre a estratégia a adoptar com esta turma e duas opções claramente se colocavam. Privilegiar a via analítica com aqueles E's e A's invertidos que, apesar do seu grande rigor, são atrapalhantes e criadores de poeiras que não vão deixar ver o que é o bom e essencial, ou optar por uma via mais visual, tipo videoclip, em que as figuras do seno e da característica de x ocupassem a mesma zona do cérebro de uma Madona ou dos Aerosmith ou de um sempre Leonard Cohen. A opção pendeu por uma via claramente visual em que o analítico iria desempenhar um papel de apoio ao gráfico. Os cálculos far-se-ão para melhor fazer gráficos e para destes melhores conclusões tirar ou para interagirem com gráficos.

Estavam reunidas as condições para um trabalho diferente. Havia material (não o desejável), a decisão estava tomada e, após algum treino numa sala sozinho, registava-se alguma perícia em manejar o equipamento (não é fácil montar e desmontar o aparelho e voltar a colocá-lo certinho na caixa). Dos alunos tratar-se-ia na sala de aula.

Plano geral

O plano da experiência junto destes alunos passará pela seguinte sequência:

- Leitura de gráficos.
- Construção e memorização (que horror!) de gráficos de funções elementares.
- As modificações produzidas num gráfico pela introdução de um parâmetro na expressão designatória da função.
- Operações sobre funções.
- Uso de gráficos para dizer coisas acerca de equações e de inequações.

Não haveria a intenção que os alunos aprendessem a trabalhar com a calculadora gráfica. Queria-se usar a calculadora num processo de ensino tradicional, para aproveitar as enormes potencialidades que eu via naquele objecto. Poder apresentar gráficos de uma forma tão rápida, tão versátil, fazer cálculos, voltar aos gráficos, era sem dúvida algo que teríamos de aproveitar. O tipo de ensino praticado foi inicialmente baseado no centralismo democrático (não é esse em que estão a pensar os políticos) em que o professor guia o curso das coisas, mas em que faz muitas perguntas a todos os alunos até obter uma resposta que mereça o consenso e que seja a matematicamente correcta. O professor era o principal introdutor.

Actividades

I) Começámos por constatar que para se fazer um gráfico de uma função, precisávamos de saber fazer, ou mandar fazer a uma calculadora, cálculos que se registam numa clássica tabela de valores x e y e saber representar esses valores num diagrama XY. Fizemos esse trabalho para funções muito simples como $y = 2x - 3$, $y = 2^x$ só para interiorizar o processo. A seguir surge a informação, não sei se correcta, que a calculadora que nos iria acompanhar durante largas aulas faz exactamente aquilo só que muito mais depressa.

II) Vimos em seguida, recorrendo ao viewscreen, funções definidas graficamente lançadas por expressões analíticas que, na altura, não eram de modo algum importantes, mas que apresentavam características de observação interessante como por exemplo $y = \log(x^2 - 2x)$ e $y = (x^3 - 3x + 2)^{1/3}$ que, com o recurso a TRACE, permitia ver os valores de x e de y da tabela que a máquina produzia. Estes gráficos foram usados para introduzir o vocabulário próprio das funções - objectos e domínio (os valores de x que têm y), imagens e contradomínio (os valores de y saídos), os zeros (os xx que dão 0 para y) o sinal da função (quais os xx que dão valores de y positivos, quais os que dão negativos), intervalos de variação (ver o cursor a subir e a descer como na montanha russa, o x a aumentar de valor e o y ora subia ora descia) e identificação gráfica dos intervalos em que a função é crescente e decrescente, máximos e mínimos de uma determinada porção de gráfico.

Algumas questões sobre a definição de função (haverá algum x com mais de um y?, uma circunferência pode ser o grafico de uma função?) sobre o conceito de injectividade (há algum y que seja imagem de mais que um x? Quais os y que são imagem de um só x?), acerca da sobrejectividade (todos os yy do eixo vertical são utilizados, são imagem de algum x? Quais os que não são imagem de qualquer x?).

III) A proposta seguinte foi a elaboração de gráficos de funções elementares como $y = x$; $y = -x$; $y = 2x + 6$; $y = -2x - 3$; $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = 1/x$; e estes saíram da máquina aproximadamente com os alunos tinham previsto.

Para saltar para as funções trigonométricas recordámos, no quadro, a matéria vista no ano anterior em que, utilizando material de desenho, régua graduada e transferidor, se desenharam ângulos e se leram valores, claro que aproximados, das diferentes funções trigonométricas para esses ângulos e se fizeram estimativas quer para ângulos quer para valores de função. Não foi para nós difícil recordar essas coisas e não foi doloroso aceitar os gráficos do seno, do coseno, da tangente e da cotangente, aliás também construídos no 10° ano. Usámos então a calculadora com o viewscreen para rever estas coisas tendo tido oportunidade para vincar a diferença entre o trabalho em graus e radianos, como se pode ver trabalhando em ZOOM STANDARD em MODE RADIAN ou DEGREE. Surgiram aqui interpelações interessantes como os equívocos que todos os anos encontramos de ouvir dizer que *sen*2 não existe ou de termos bocas abertas quando se diz que o *sen*4 é um número negativo, porque 4 no círculo trigonométrico fica no 3° quadrante. O objectivo desta actividade foi a de familiarizar os alunos com os gráficos de funções elementares, estabelecer diferenças e analogias entre eles e instalar uma certa confiança nas possibilidades de cada um.

IV) Nesta fase, apreciámos o efeito que um parâmetro introduzido na expressão designatória produzia no gráfico da função. Vimos o efeito de um 3 sobre a função $y = x^2$. Passaram pelo écran os gráficos de $y = x^2 + 3$; $y = x^2 - 3$; $y = (x-3)^2$; $y = (x+3)^2$; $y = \pm 3x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$, após algum diálogo sobre o que iria acontecer em cada uma das situações, e podemos dizer que nesta altura já se previa com grande correcção e com bastantes alunos a fazê-lo bem.

Repetiu-se o mesmo esquema com a função seno e com o número 2 e apreciou-se o efeito de aplicação de módulo de uma função.

Surgiram translações horizontais, verticais, contracções, dilatações e outros apertos e desapertos.

V) Foi ainda utilizado o viewscreen para apreciar as funções soma, produto e quociente, sendo aqui usado para verificar a validade de resultados obtidos pelos alunos perante a actividade de representar a soma, diferença, quociente e produto de funções definidas pelos seus gráficos.

Foram vistos ainda os gráficos da função característica e da mantissa e em comparação o gráfico de uma função com a sua inversa.

Nesta fase apareceram já gráficos bastante complicados que se construiam por aplicação de sucessivas transformações.

Relações

Durante várias semanas de aula, o viewscreen fez-nos companhia na sala de aula, não só para ajudar a dar a matéria como para esclarecer e dar significado gráfico a coisas que íamos obtendo analiticamente. Resolvemos muitas equações e inequações quer por processo analítico quer por processo gráfico ou os dois em simultâneo, como inequações do 1°, do 2° e 3° graus, modulares e outras envolvendo a função homográfica. Fizeram-se e disseram-se coisas acerca de equações e de inequações que o processo analítico não nos permitia observar, como, por exemplo, apreciar o número de soluções de equações, envolvendo polinómios e funções trigonométricas. Este trabalho não foi considerado importante pelos resultados obtidos na resolução, mas sim pelo envolvimento que provocou nas coisas que não dão números certos, em situações problemáticas que os alunos outrora abandonavam facilmente, desaparecendo aquela reacção frequente de que não sou capaz de fazer, mesmo antes da abordagem.

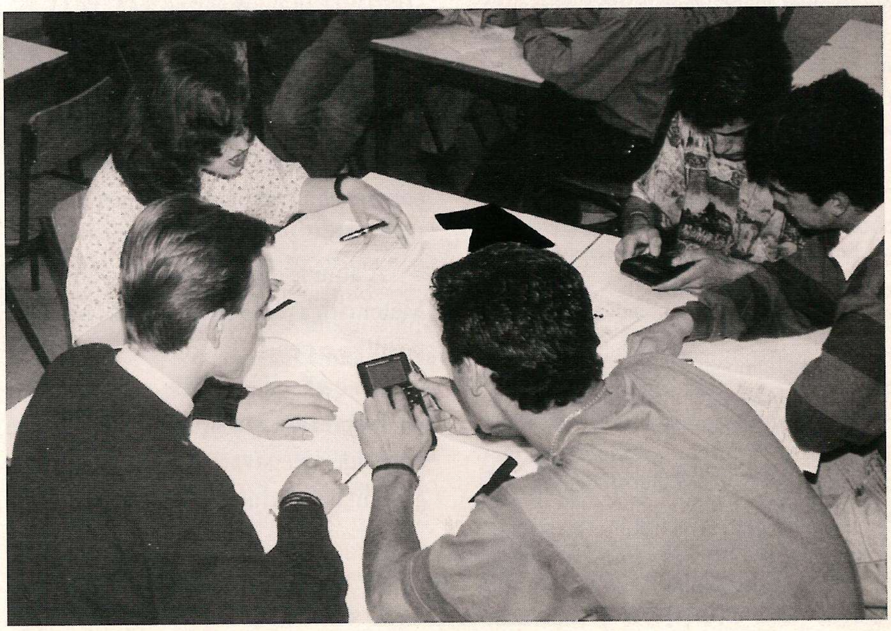
Foi possível fazer ainda modelação gráfica para alguns fenómenos físicos do mundo real.

De referir ainda o facto de os alunos na primeira aula de cada semana, durante este período, apresentarem um relatório sobre as actividades da semana em que deveriam referir os aspectos mais significativos que tinham sido vistos. Pretendia-se que os alunos escrevessem matemática e sobre assuntos matemáticos.

Resultados desta abordagem

Podemos dizer que o ambiente que se viveu durante este tempo de trabalho

- favoreceu a criatividade perante situações menos vulgares — os alunos não se assustavam perante situações problema e abordavam-nas com alguma imaginação;
- apresentou uma maior gama de processos e de recursos para enfrentar situações problemáticas — resolução grá-



fica, analítica e mista de algumas questões;

- reforçou o espírito crítico — a comparação entre processos e a criação de hábitos de previsão e estimação instalou o questionar da plausibilidade de certos resultados;
- trouxe maior clarificação de conceitos matemáticos — noções como período, simetrias, assímptotas, continuidade, contradomínio, injectividade, sobrejectividade, limite e outros saem mais claras e até a linguagem simbólica começa a dizer alguma coisa de palpável;
- melhorou a visão global dos diferentes assuntos favorecendo o estabelecimento de relações entre eles;
- favoreceu a retenção de ideias matemáticas — mais facilmente se retem uma imagem que um texto;
- contribuiu para filtrar os processos analíticos — há operações analíticas sugeridas pelos gráficos que de outro modo não seriam accionadas.

Opinião de alguns alunos da turma do 11º B1 sobre a utilização da calculadora:

Penso que as calculadoras gráficas são muito úteis porque através delas consegui dissipar dúvidas. Passei a compreender como se fazem gráficos de funções que não era capaz de fazer anteriormente. Passei a saber resolver algumas equações que antes não era capaz de resolver analíticamente. (Rui Abrantes)

Eu penso que as aulas de Matemática em que utilizámos a calculadora gráfica me foram muito úteis para perceber e entender melhor aquilo que se podia passar com determinados gráficos, no que diz respeito por exemplo aos zeros, ao tipo de linha que faz o gráfico, aos limites, se é crescente ou decrescente, se é majorada se é minorada, etc.. Penso também que tendo aprendido a dar uma explicação gráfica para determinada questão, também facilmente posso dar uma explicação analítica da mesma questão. (Luis Branquinho)

As aulas de matemática assistidas com a calculadora gráfica ajudaram-me na resolução gráfica de inequações ao passo que se resolvermos analiticamente as inequações nem sempre sabemos à primeira vista as soluções, levando uma pessoa a nem sempre entender o que está a fazer. (Nelson Ribeiro)

Eu penso que as calculadoras gráficas nos ajudaram muito na compreensão da matéria relativa aos tipos de funções e gráficos correspondentes. Com base neles tornou-se mais fácil entender e retirar o que de mais significativo e importante tinha a função, para além de nos ter ajudado a resolver outros tipos de situações que à primeira vista seriam difíceis. Torna a Matemática em algo de acessível para todos e não apenas para alguns na medida em que fomentou a curiosidade em saber como uma função seria representada graficamente. (Filipe Machado)

Para mim as aulas de Matemática com calculadoras gráficas são uma grande ajuda pois pelos gráficos podemos resolver facilmente o que custaria a resolver analiticamente, por isso os gráficos são de uma grande ajuda. (Pedro Pereira)

Conclusão

Estou convencido de que o tempo do processo de aprendizagem não é directamente proporcional ao número de páginas do livro com a matéria a leccionar. O tempo que gastámos (mais que pelo processo tradicional) no tratamento de generalidades de funções e funções trigonométricas não foi de modo algum tempo perdido. Ganhámos noutras zonas do programa algum tempo que nos permitiu velocidade de cruzeiro com os mesmos alunos com que iniciámos o ano e a aquisição de novos conceitos fez-se sob uma base razoável ao nível da compreensão.

A atitude dos alunos relativamente à Matemática pode considerar-se bastante positiva e penso que o facto de praticamente qualquer assunto ou noção ter uma representação gráfica que a suporte tem sido decisiva para que os alunos gostem de... brincar com Matemática.

António Abrantes
Escola Secundária de Seia

Matemáticos Portugueses

Daniel A. da Silva
(1814-1878)

Nasceu em Lisboa. Aos 15 anos assentou praça na Armada, e frequentou a disciplina de Náutica nas duas Academias existentes; terminou os respectivos cursos em 1832 e 1835, tendo sido, entretanto, em 1833, promovido a Guarda-Marinha. Revelou-se com notável aptidão para as matemáticas pelo que resolveu frequentar a Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra; aí se formou em 1839. Voltou para Lisboa e passados alguns anos aceitou a nomeação para Lente de Matemática na Escola Naval (sucedânea de uma das Academias que frequentara), onde a par de notável acção pedagógica desenvolveu grande actividade de investigação, de cujos frutos destacamos as memórias:

- ***Sobre a Rotação das Forças em torno dos Pontos de Aplicação*, que a Academia de Ciências (Lisboa) publicou em 1851; trata da importante teoria que constituiu a Estática, ramo da Mecânica;**
- ***Propriedades Gerais e Resolução de Congruências Binómias*, publicada em 1853, onde são estudadas com profundeza e originalidade diversas questões elevadas da Teoria dos Números.**

Pena foi que ficassem jazessem ignoradas, por longos anos, nas Bibliotecas de quase todas as Academias do mundo, por estarem escritas em Português...!.

Compilação de Sérgio Macias Marques