Um breve olhar sobre os grafos

Cecília Perdigão

A Teoria dos Grafos é uma das áreas da Matemática que maior interesse desperta nos alunos, não só pela simplicidade dos conceitos e da clareza dos resultados mas, também, e principalmente, pelas suas inúmeras aplicações.

Embora a Teoria de Grafos tenha surgido para resolver problemas de índole recreativa tem hoje aplicações nas mais diversas áreas, desde a biologia, a química e a engenharia, como até mesmo na música ou na arqueologia.

Mas, afinal, o que é um grafo?

Um grafo é, essencialmente, um diagrama formado por pontos, aos quais damos o nome de *vértices*, e por linhas, às quais damos o nome de *arcos*. Cada um destes arcos une exactamente dois vértices, podendo ter uma dada orientação (nesse caso dizemos que se trata dum grafo orientado), ou mesmo ter associado um certo valor a que chamamos a *capacidade do arco*.

Este tipo de diagrama permite esquematizar diversas situações em muitas áreas científicas e tecnológicas ou mesmo simples realidades da vida quotidiana. Assim, um grafo pode utilizar-se para representar moléculas, mapas de estradas, relações internacionais ou mesmo reacções químicas; para isso, e em primeiro lugar, é necessário que sejam escolhidos, devidamente, os vértices e os arcos de tal grafo, depois, basta representá-los numa folha de papel!

Para os exemplos atrás apresentados, podíamos escolher os respectivos vértices e arcos como indicado na tabela inserida nesta página.

Naturalmente, esta não é a única forma de utilizar os grafos. É, digamos, a mais primária de os utilizar, isto porque o problema é apenas esquematizado mas não resolvido. Há porém, aplicações menos primárias e bastante mais produtivas da Teoria de Grafos. Assim, é possível resolver problemas como:

Qual o caminho mais curto entre duas cidades?

Quantas moléculas existem com a fórmula C_6H_{14}*?*

É possível colorir um mapa com apenas 4 cores de forma a que regiões adjacentes não tenham a mesma cor?

Ou mesmo,

Como pôr a funcionar os semáforos dum cruzamento?

À excepção do último, todos estes problemas necessitam do conhecimento de alguns resultados básicos da Teoria de Grafos. Não quero deixar, no entanto de mostrar qual a resolução possível do último problema utilizando pouco mais do que a esquematização do problema através dum grafo.

Vamos então referir um problema

GRAFOS	VÉRTICES	ARCOS
grafos das moléculas	*átomos*	*ligações entre átomos*
grafos das estradas	*localidades*	*estradas*
grafo das relações internacionais	*países*	*relações entre países*
grafo das reacções químicas	*moléculas*	*reacções entre moléculas*

deste tipo apresentado por K. R. Wilson e J. Watkins no livro *Graphs. An introductory approach* (1990). Consideremos, então, o cruzamento da fig. 1.

Suponhamos que se querem instalar neste cruzamento semáforos, de forma que nenhum carro espere mais do que um minuto no respectivo semáforo. Construamos, em primeiro lugar o grafo que esquematiza a situação; às direcções *a*, *b*, *c*, *d*, *e* e *f*, fazemos corresponder os vértices do grafo, existindo um arco a ligar dois destes vértices sempre que as direcções correspondentes sejam compatíveis, ou seja, sempre que seja possível dois carros seguirem essas direcções simultaneamente. Obtemos, assim, o chamado grafo das compatibilidades (ver fig. 2).

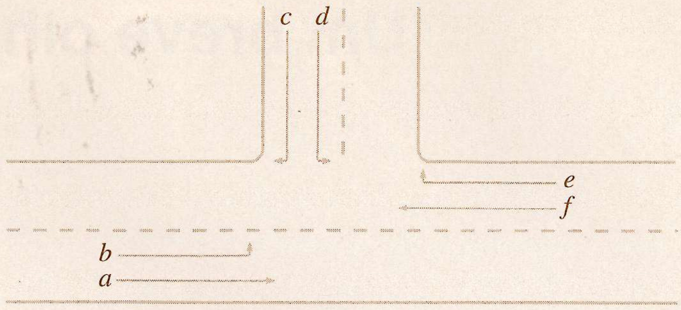

fig. 1

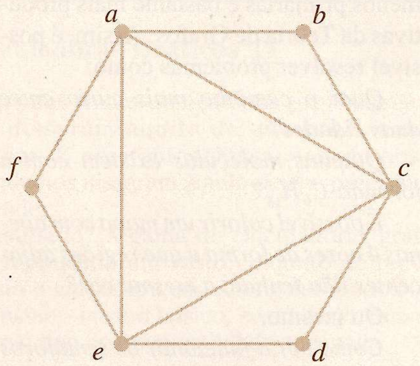

fig. 2

Representemos por um círculo, o minuto ao fim do qual já todos os semáforos passaram a verde pelo menos uma vez, e por linhas paralelas ao círculo as direcções que têm o semáforo verde nesse período de tempo. Claramente que é sempre possível a solução indicada na figura 3.

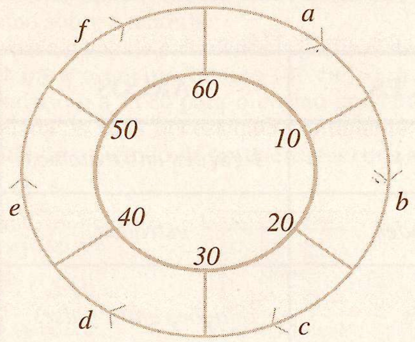

fig. 3

Mas, esta solução, não é, com certeza, a mais satisfatória pois, desta forma, cada semáforo estaria vermelho exactamente 50 segundos, e verde apenas 10, facto que iria prejudicar o escoamento do trânsito no cruzamento.

Como melhorar esta situação?

Antes de mais, é preciso ter em consideração alguns conceitos básicos:

Chamamos *subgrafo* dum grafo G a um novo grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto do conjunto de vértices do grafo inicial, e de tal forma que existe um arco a ligar dois vértices se, e só se, esse arco existia em G.

Dizemos que um grafo é *completo* se, e só se, qualquer que seja o par de vértices do grafo existe um arco a ligá-los.

Posto isto, é relativamente simples entender a seguinte estratégia para a resolução do problema:

1. Construir o grafo das compatibilidades.
2. Encontrar o maior subgrafo completo contido no grafo anterior.
3. Dividir o tempo disponível pelo número mínimo de subgrafos completos que cobrem o total dos vértices.
4. Colocar para cada um destes períodos de tempo os vértices correspondentes a cada um destes subgrafos.

Pode agora construir-se um esquema semelhante ao anterior (ver fig. 4), seguindo os diversos pontos da estratégia atrás descrita.

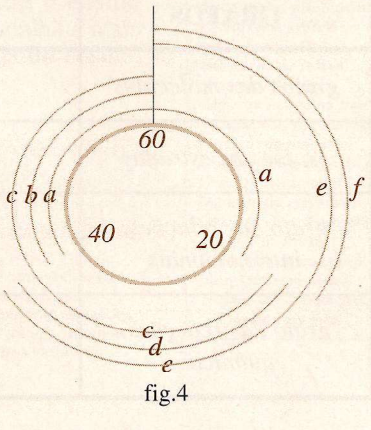

fig.4

Repare-se que, desta forma, as direcções *a*, *e*, e *c* estão com sinal verde 40s e as direcções *b*, *f*, e *d* durante 20s. Esta situação é bastante mais favorável do que a anterior, apesar de poder ser melhorada se se tiver em conta o fluxo do tráfego em cada uma das direcções.

A simplicidade de resolução destes problemas e a variedade de aplicações possíveis, que atrás referi, evidenciam algumas das vantagens que poderia ter a inclusão deste item nos programas da disciplina de Matemática do ensino secundário.

Os grafos são uma estrutura simples e natural que permite a visualização geral dum problema e a esquematização do raciocínio. Desta forma os alunos terão mais facilidade em resolver certo tipo de problemas e, o que é ainda mais importante, em perceber qual é o problema, quais os dados disponíveis e quais as estratégias possíveis para o tentar resolver. Além disso, dão a possibilidade de resolver problemas práticos, ligando muito mais a Matemática à sua experiência de vida. Finalmente, pela sua variedade de aplicações e pelas áreas abrangidas por estas, os grafos permitem uma interdisciplinaridade com todas as disciplinas do ensino secundário, estando assim perfeitamente de acordo com a filosofia da nova reforma do ensino básico e secundário.

Referências

Cabral, I. *Apontamentos de Grafos e Aplicações* (Manuscrito não publicado).

Wilson, K.R. e Watkins, J. (1990). *Graphs. An introductory approach.* Nova Iorque: John Wiley and Sons.

Cecília Perdigão
F.C.T., Universidade Nova de Lisboa