Matrizes por detrás das redes

Candelaria Espinel Febles

"Os professores ensinam a Matemática do passado, os alunos viverão o futuro."
Ubiratan d'Ambrosio, VI JAEM, 1993

As redes permitem modelar alguns fenómenos da nossa complexa sociedade e as matrizes permitem armazenar a informação contida no modelo. Operar com matrizes, como estruturas discretas que são, é tarefa do computador. Codificar a informação e interpretar o seu significado diz respeito ao homem.

Nas linhas seguintes descrevo o ambiente que utilizei com os meus alunos para que conhecessem alguns problemas de matemática discreta. Isto também me deu a oportunidade de introduzir algumas noções da teoria de grafos.

Matrizes

A figura 1 mostra seis cidades espanholas, próximas de Portugal: Badajoz (B), Cáceres (C), Mérida (M), Zafra (Z), Córdova (D) e Sevilla (S).

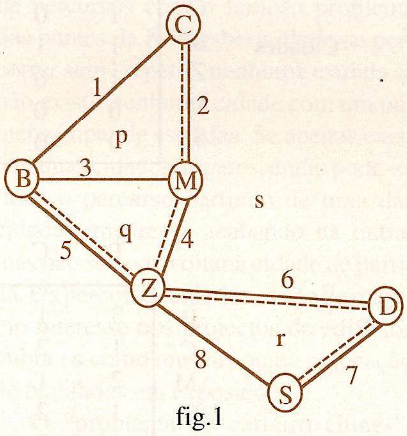

fig.1

Escolheram-se oito das estradas que as ligam, e p, q, r e s representam as quatro zonas ou regiões que estas estradas determinam. A informação que o gráfico fornece pode ser recolhida através de várias matrizes. Consideremos as matrizes como tabelas de dupla entrada onde se guarda informação codificada. Uma forma de codificar a rede através de matrizes é assinalar um 1 se uma relação é verdadeira e 0 se é falsa.

As matrizes que se seguem, além de recompilarem diversa informação presente no gráfico, submetem-se a algumas operações elementares que permitem obter mais dados sôbre a rede, que por sua vez resolvem alguns problemas da nossa complexa sociedade.

M1 — As seis cidades estão ligadas por oito estradas (fig. 2)

Quando uma estrada passa por uma determinada cidade, coloca-se um 1 na matriz e 0 caso assim não seja. Ao adicionar os elementos da matriz por linhas obtém-se o respectivo número de estradas que saem de cada cidade. Ao adicionar por colunas, obtém-se sempre um 2, que nos indica que as estradas têm uma cidade em cada extremo.

		Estradas								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
Cidades	B	1	0	1	0	1	0	0	0	3
	C	1	1	0	0	0	0	0	0	2
	M	0	1	1	1	0	0	0	0	3
	Z	0	0	0	1	1	1	0	1	4
	D	0	0	0	0	0	1	1	0	2
	S	0	0	0	0	0	0	1	1	2
		2	2	2	2	2	2	2	2	

fig.2

M2 — Existem quatro regiões separadas por oito estradas (fig. 3)

Codificou-se por 1 uma estrada se esta limita uma região e por 0 no outro caso. Ao adicionar por linhas obtém-se o número de estradas que limitam cada região. Ao adicionar por colunas obtemos sempre um 2, isto é, há uma região de cada lado da estrada.

M3 — Existem cinco cidades que estão em quatro regiões (fig. 4)

O 1 indica que uma cidade está nessa região. A adição por linhas dá o número de regiões que uma cidade limita. Ao adicionar por colunas obtém-se o número de cidades que estão na fronteira de cada região. Note-se que a fórmula de Euler se verifica:

Cidades + Regiões – Estradas = 2

conhecida na Geometria por:

Vértices + Superfícies – Arestas = 2.

Nas três matrizes anteriores recolheu-se a relação de incidência de três conjuntos: Cidades, Regiões e Estradas. Também é possível associar um conjunto consigo próprio. Assim, na seguinte matriz está patente uma relação de adjacência entre cidades.

M4 — Cidades ligadas por uma estrada

Temos uma matriz Σ quadrada e simétrica (fig. 5). Ao multiplicar esta matriz por si mesma, obtem-se uma nova matriz Σ^2 (fig. 6) que nos dá o número de trajectórias distintas de tamanho dois de uma cidade para outra. Por exemplo, para ir de Badajoz a Mérida, utilizando duas estradas no trajecto, existem duas formas distintas. Contudo, de Badajoz a Córdoba utilizando duas estradas apenas existe uma única forma. Analogamente, cada elemento de Σ^3 dá o número de trajectórias distintas de tamanho três de uma cidade para outra.

M5 — Trajectórias mais curtas entre cidades (fig. 7)

Os elementos da matriz dão o número mínimo de estradas que necessitamos de utilizar para ir de uma cidade para outra. Assim temos trajectos que utilizam 1, 2 ou 3 estradas. O 3 é o diâmetro ou distância máxima entre cidades.

Estradas

Regiões	1	2	3	4	5	6	7	8	
p	1	1	0	0	0	0	0	0	3
q	0	0	1	1	1	0	0	0	3
r	0	0	0	0	0	1	1	1	3
s	1	1	0	1	1	1	1	1	7
	2	2	2	2	2	2	2	2	

fig.3

Cidades

Regiões	B	C	M	Z	D	S	
p	1	1	1	0	0	0	3
q	1	0	1	1	0	0	2
r	0	0	0	1	1	1	3
s	1	1	1	1	1	1	4
	2	2	2	2	2	2	

fig. 4

Cidades

Cidades	B	C	M	Z	D	S
B	0	1	1	1	0	0
C	1	0	1	0	0	0
M	1	1	0	1	0	0
Z	1	0	1	0	1	1
D	0	0	0	1	0	1
S	0	0	0	1	1	0

fig.5

	B	C	M	Z	D	S
B	3	1	2	1	1	1
C	1	2	1	2	0	0
M	2	1	3	1	1	1
Z	1	2	1	4	0	1
D	1	0	1	1	2	1
S	1	0	1	1	1	2

fig.6

	B	C	M	Z	D	S
B	0	1	1	1	2	2
C	1	0	1	2	3	3
M	1	1	0	1	2	2
Z	1	2	1	0	1	1
D	2	3	2	1	0	1
S	2	3	2	1	1	0

fig.7

M6 — Matriz de distâncias (fig. 8)

A matriz simétrica com as distâncias em quilómetros é aquela que por vezes acompanha os mapas das estradas. No nosso caso, os dados foram adaptados.

	Badajoz	Cáceres	Mérida	Zafra	Córdoba	Sevilla
Badajoz	•	90	65	40	240	240
Cáceres	•	•	70	130	330	330
Mérida	•	•	•	60	260	260
Zafra	•	•	•	•	200	200
Córdoba	•	•	•	•	•	140
Sevilla	•	•	•	•	•	•

fig.8

Problemas

P1 — Localização de centros

No nosso exemplo é evidente que Zafra é uma espécie de centro, não por ser capital de província, mas pela sua localização. Qualquer fenómeno, como uma inundação desta cidade, afectaria as restantes cidades, em especial as comunicações das cidades que estão a norte de Zafra com as do sul, partindo do pressuposto que apenas dispunhamos da rede de estradas assinaladas.

A nossa percepção sobre a importância de Zafra é confirmada através da matriz M5. Ao adicionar os elementos da matriz por linhas ou colunas obtem-se:

B	C	M	Z	D	S
7	10	7	6	9	9

A Zafra corresponde um valor mínimo de 6. Por isso Zafra é o centro. Um centro é a cidade com a propriedade da distância máxima entre essa cidade e as outras ser a menor possível.

Os problemas de escolha de um lugar que obedeça a um determinado critério, são conhecidos como localização de plantas. Pensemos, por exemplo, num problema de Ecologia: colocar depósitos de água para apagar incêndios florestais, onde o objectivo é minimizar o tempo entre o foco de emergência e os locais onde se colocam os depósitos. Evidentemente que poderá ser melhor dispor de vários centros. Outros exemplos de problemas de localização de plantas que se apresentam com mais frequência na nossa complexa sociedade são: determinar onde colocar centros de emergência como hospitais, serviço de bombeiros, estação de autocarros, aeroportos, centros de resíduos sólidos, ... O critério pelo qual se escolhe o centro pode mudar de acordo com o exemplo que se escolha.

P2 — Percursos eulerianos

Se o Ministério dos Transportes decide rever os sinais de trânsito das oito estradas assinaladas, evidentemente que tem de passar por cada uma delas. Mas, como é fácil de perceber, seria desejável não ter que voltar a passar por nenhuma estrada uma segunda vez. O técnico encarregado questiona-se se isto será possível. Por tentativa e erro pode concluir-se que a única solução é partir de Badajoz para chegar a Mérida ou vice-versa.

Na matriz M1 de cidades–estradas observa-se que Badajoz e Mérida são as duas únicas cidades ligadas com um número ímpar de estradas.

B	C	M	Z	D	S
3	2	3	4	2	2

O nome deste percurso deve-se a Euler que em 1736 descobriu esta classe de percursos com o famoso problema das pontes de Königsberg. Pode-se percorrer sem "repetir" nenhuma estrada se não existir nenhuma cidade com um número ímpar de estradas. Se apenas existem duas cidades ímpares, então pode-se fazer o percurso partindo de uma das cidades ímpares e acabando na outra, mas não se pode voltar à cidade de partida. Os percursos eulerianos são de máximo interesse nos projectos de edifícios públicos como museus ou na colocação de pavilhões em exposições.

O "problema do carteiro chinês", consiste em procurar um percurso euleriano, caso este exista, tentando também que a distância a percorrer seja a mais curta possível. Em matemática discreta, este problema ficou conhecido precisamente com este nome e tem várias aplicações como: distribuição de correio, recolha de lixo, ...

P3 — Árvore mínima

Pretende-se colocar linhas telefónicas que liguem as seis cidades. Os postes serão colocados ao longo das estradas. A questão é instalar as linhas utilizando o menor número possível de metros de cabo.

O algoritmo que permite calcular uma árvore mínima é o seguinte:

Passo 1: Seleccionar, em primeiro lugar, as duas cidades mais próximas e uni-las. No nosso caso, Badajoz e Zafra.

Passo 2: Identificar a cidade mais próxima a uma já unida e ligá-la. Repetir este passo até que todos os vértices estejam unidos.

No nosso caso, unimos Mérida a Zafra e de seguida Cáceres a Mérida. Resta unir Zafra com Córdova ou Sevilla e depois a cidade que falta. No gráfico está assinalada com traços descontínuos uma possível árvore mínima.

Encontrar uma árvore que se estenda por todas as cidades e que além disso tenha um percurso mínimo tem grande utilidade em múltiplas situações práticas. Por outro lado, as estruturas de árvore aparecem em situações hierárquicas conhecidas, como a árvore genealógica; mas também são estruturas de importância vital para organizar bases de dados em computadores.

P4 — Circuito hamiltoniano

Estamos a fazer turismo pela zona e queremos visitar as seis cidades, evidentemente sem passar duas vezes pela mesma, caso seja possível.

O nome do circuito deve-se a Hamilton que investigou em 1859 a existência de tais circuitos num dodecaedro cujos vértices representavam 20 cidades do mundo. Ao contrário dos percursos eulerianos não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para que exista um circuito hamiltoniano, apenas existem resultados parciais.

O famoso "problema do vendedor" consiste em encontrar um circuito hamiltoniano de percurso mínimo. Como é evidente, é um problema com múltiplas

(continua na pág. 10)

G.7.1 — Embora não se ponha em causa uma primeira abordagem, como é indicada no programa, pensamos que é mais prudente e rentável a via proposta.

N.7.1 — A geometria pode e deve entrar logo nesta unidade. Parece-nos impensável estudar quadrados e raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas, sem recurso à geometria. Quanto mais cedo forem estudados perímetros e áreas de figuras planas melhor poderão ser aproveitados ao longo do 3º Ciclo.

O número de aulas reservado a esta unidade, mesmo com as características actuais, é manifestamente insuficiente.

G.8.3 — Dada a falta de suporte lógico, o nível etário e os interesses dos alunos, o assunto não poderá ser tratado com rigor, ganhando ao ser abordado informalmente e disseminado ao longo dos três anos, sem necessidade de abrir um capítulo.

G.8.4 e G.9.1 — Os estudantes podem adquirir uma visão dinâmica do plano sem necessidade do estudo das translações e das rotações. Aliás este assunto acabaria por ser estudado de maneira muito superficial.

Não vemos inconveniente em que a noção de vector seja introduzida na Física e só mais tarde clarificada para os alunos que seguem Matemática no 10º ano.

A propósito das Funções (F.8 e F.9) estudadas no 8º e 9º anos, podem e devem ser introduzidos exemplos de transformações geométricas.

Fazemos notar que o tema "Geometria" não fica enfraquecido uma vez que, do que foi retirado, o essencial é integrado nos temas "Números e Cálculo" e "Funções".

E.8 — Não nos parece necessário abrir um capítulo no 8º ano, para a estatística. Todas as questões envolvidas podem ser introduzidas de uma só vez. Os alunos podem e devem recorrer à estatística sempre que necessário e em qualquer altura.

Com base no novo programa do 2º Ciclo, pensamos que os alunos, ao chegarem ao 7º ano, terão maior facilidade nos temas N.7.1, N.7.2, G.7.2, E.7/E.8 e F.7. Se não se verificar esta melhoria será de pensar em novo agrupamento para aliviar o 7º ano. Em qualquer caso impõe-se uma redistribuição do número de aulas reservado a cada tema. Parece-nos importante, ainda mais com esta opção, que o programa indique claramente o grau de aprofundamento a atingir em cada tema.

Ao longo de cada unidade, e para lá do programa mínimo, serão de referir objectivos a atingir consoante as turmas. É preferível dentro da mesma unidade atingir, maior aprofundamento, do que tratar temas em opção. Por exemplo: Em G.9.2 parece-nos que só há vantagem em "não esconder" a cotangente. Há vantagens práticas no uso de tabelas e na escolha do caminho que proporciona cálculos mais simples.

Esperamos que este seja mais um elemento para discussão tendo em vista a revisão e reescrita dos programas.

Dulce Batista,
E. S. Rainha D. Leonor
Judite Barros
E. S. Filipa de Lencastre

Matrizes por detrás das redes *(continuação da pág. 5)*

aplicações na sociedade. Infelizmente este problema é muito difícil quando o número de cidades é muito grande. Para poucas cidades, um algoritmo válido consiste em viajar à cidade não visitada mais próxima daquela que se encontra.

O grupo dos 12

A fotografia retirada do diário *El País* de 5 de Abril de 1993 mostra uma rede entre os 12 países da CE.

Trabalhar alguns dos problemas formulados anteriormente com esta rede são possivelmente problemas do futuro ao qual pertencem os nossos alunos.

[1]Nas VI JAEM (Badajoz), a professora G. Veloso convidou-me a escrever algo sobre a teoria dos grafos para esta revista. Como resposta a este simpático convite, relatei parte da minha experiência com alunos do Magistério, que julgo serem transferíveis a outros níveis de ensino.

Referências

SMP 7–13 (1977). *The School Mathematics Project. Further Matrices and Transformations.* Cambridge: Cambridge University Press.

Thulasiraman, K. e Swamy, M. (1992). *Graphs: Theory and algorithms.* Nova Iorque: John Wiley.

Wilson, R. (1993). *Introducción a la teoría de grafos.* Alianza Universidad.

Candelaria Espinel Febles
Universidade de La Laguna, Espanha
Tradução de António Borralho