Aprender com os alunos

Margaret A. Farrell

Este artigo foi publicado no Mathematics Teacher de Novembro de 1992 e aborda uma das seis normas dos Professional Teaching Standards, que o NCTM publicou em 1991: "Conhecer os alunos como aprendizes de Matemática". Neste momento, a APM está a traduzir os Professional Standards, documento onde é assumido que "a formação de professores é um processo evolutivo". Como é que os professores podem continuar o seu desenvolvimento profissional fora dos momentos formais de formação? Uma possibilidade importante é a análise e a reflexão relativas às informações que podem obter nas suas aulas, como por exemplo, as respostas dos alunos no processo de aprendizagem matemática.

As percepções dos alunos e a validade do *feedback*

"O que é que aprenderam os meus alunos? A minha caderneta está cheia de dados sobre isto!" Provavelmente assim é, pois os testes e questionários são o modo tradicional de avaliar as aprendizagens dos alunos, e não devem ser desprezados. No entanto, um teste só dá uma amostra das aprendizagens e normalmente não tem como objectivo fornecer dados explicativos das falhas da aprendizagem. O *feedback* obtido nos momentos de pergunta-e-resposta pode dar pistas sobre as causas das ideias erradas, mas alguns alunos são capazes de evitar revelar os motivos que estão na base das suas concepções erróneas. Por exemplo, respostas correctas podem disfarçar confusões sobre o processo que conduziu à resposta. Além disso, mesmo quando os professores questionam os processos, os alunos criativos podem ser mais reservados acerca da abordagem que fizeram para obter as suas respostas. Eles podem pensar que aquilo que inventaram não merecerá a aprovação do professor.

Nenhuma destas caracterizações das respostas dos alunos surpreenderá professores experientes do ensino secundário. Eles sabem que têm um único obstáculo a vencer nas suas tentativas para obter *feedbacks* válidos acerca da aprendizagem dos alunos. Alguns alunos esforçam-se para alcançar resultados aceitáveis em vez de procurarem aprender o assunto. Para agravar o problema, se as experiências anteriores dos alunos em aulas de matemática os ensinou que a memorização de definições ou demonstrações do livro é olhada favoravelmente, eles tornar-se-ão peritos, recitando definições, escrevendo fórmulas, e debitando resultados que passaram pela execução de algoritmos típicos. Muito provavelmente, eles não serão capazes de repetir o seu sucesso duas semanas depois do teste. Contudo, esta perspectiva bastante comum da aprendizagem da matemática não é somente um obstáculo invisível quando os professores se esforçam para saber o que foi aprendido, mas também é uma dificuldade quando eles tentam descobrir as ideias matemáticas que foram retidas e que poderão ser transformadas em novas aprendizagens.

Análise de erros padrão

"Em alguns casos não preciso de obter o feedback *da aprendizagem dos alunos. Por exemplo, eu consigo descrever erros específicos que alguns dos meus alunos de álgebra cometerão na factorização de um polinómio. Ano após ano, alguns deles dizem que os factores de a^2+b^2 são $(a+b)(a+b)$".* Isto traduz a vossa experiência? Estou certa que sim e com certeza que darão outros exemplos de erros que ocorrem com muita regularidade. Essa mesma regularidade deveria despertar o nosso interesse. Em vez de caracterizar estes erros padrão como exemplos de não aprendizagem, poderíamos analisar os processos a fim de descobrir que tipo de aprendizagem fizeram os alunos que os levou a usar estes algoritmos defeituosos. (Eles aprendem muita coisa que nós não temos intenção de lhes ensinar!) Lembrem-se que todos nós tentamos reduzir detalhes a uma espécie de regra ou padrão que seja facilmente memorizada e armazenada. Os alunos não são diferentes. Eles constroem algoritmos que podem ser ou não válidos. Dado que os exemplos usados

nas aulas introdutórias são normalmente simples, mesmo os algoritmos errados dos alunos podem levar a respostas correctas.

Coloquemo-nos na pele de investigadores e reconsideremos o algoritmo incorrecto da soma dos dois quadrados, procurando ver o que os alunos aprenderam em vez do que não aprenderam. Talvez a regra a que chegaram se aplique também ao problema da diferença de dois quadrados; mas nesse exemplo a regra produz respostas correctas. Aqui está um algoritmo defeituoso plausível:

> Para factorizar a soma ou diferença de dois quadrados, calcular a raiz quadrada dos quadrados e escrevê-los na forma do produto de dois binómios.
>
> (1) $a^2-b^2 = (a\ \ b)(a\ \ b)$
>
> (2) $a^2+b^2 = (a\ \ b)(a\ \ b)$
>
> No primeiro exemplo, colocar sinais diferentes entre a e b.
>
> No segundo exemplo, colocar o mesmo sinal, +, entre a e b.

"Porque é que eles não verificam o seu trabalho?" —poderão queixar-se os professores. Suponha que eles responderam que já o verificaram. Que regra poderiam estar a usar se ela confirma a resposta correcta no exemplo da diferença de quadrados e os leva a pensar que também factorizaram correctamente a soma de quadrados? Uma resposta típica de um aluno é: *"Eu elevei ao quadrado o primeiro termo, elevei ao quadrado o segundo termo, e multipliquei os sinais entre os termos"*. Foi identificado um segundo falso algoritmo associado a esta situação. Reparem no problema que aqui se coloca. Normalmente, tentamos que os alunos encontrem os seus erros, encorajando-os a corrigir o seu próprio trabalho. Na factorização, o processo inverso, a multiplicação, serve como processo de verificação. Contudo, neste exemplo, os alunos fecharam o ciclo, criando uma regra de verificação que valida o seu falso algoritmo original.

Como poderíamos ajudar estes alunos a tomar consciência da existência e origem destes dois erros? Nós poderíamos perguntar-lhes porque é que (a-b) e (a-b) não são os factores de a^2+b^2, uma vez que, de acordo com o algoritmo de verificação dos alunos, o produto de (a-b) e (a-b) também é a^2+b^2. Poderíamos pedir aos alunos para completarem e analisarem a multiplicação de binómios, tais como (8+2)(8-2), (7+3)(7-3), (2+4)(2+4) e (5+6)(5+6), usando primeiro o seu algoritmo de verificação e depois simplificando dentro de parêntesis antes de multiplicar. Ambas as sugestões podem ajudar os alunos a reexaminar a sua regra de verificação e levá-los a concluir que existe um problema com o seu falso algoritmo. Quando os alunos estão envolvidos no processo de diagnóstico, têm uma oportunidade para reflectir sobre os seus próprios procedimentos. Assim, esta técnica, que permite aos alunos confrontar contradições na sua aprendizagem e requer que eles analisem essas contradições, tem o potencial de os ajudar a aprender o que nós queremos que eles aprendam.

A análise dos erros padrão dos alunos tem um potencial enorme, quer seja com erros que se repetem ano após ano em vários grupos de alunos ou que aparecem num aluno particular perante um determinado tipo de problema. Estudar erros padrão, falsos algoritmos, ou concepções erróneas para descobrir o que os alunos aprenderam em vez de desprezá-los como evidências de falhas de aprendizagem pode ajudar os professores a entender a visão matemática dos alunos e a forma como a aplicam na sua aprendizagem. "Os professores devem, simultaneamente, ser capazes de perceber a matemática através das ideias dos alunos e de perceber as ideias dos alunos através da matemática em que estão envolvidos" (NCTM, 1991, p. 145). Uma excelente fonte acerca de erros padrão comuns nos alunos e da sua análise é o trabalho de Davis (1984). Davis tem um jeito especial para ajudar o leitor a visualizar a sala de aula e a "pensar em conjunto" com o aluno enquanto ele resolve um problema.

Algumas estratégias de *feedback* prometedoras

Para estudar os erros padrão ou as concepções erróneas básicas dos alunos, os professores podem precisar de estratégias de recolha de *feedback* que conduzam a informações esclarecedoras. Os professores poderão criar oportunidades para que os alunos troquem opiniões sobre um conjunto de problemas, escrevam como explicariam um novo conceito a um irmão mais novo ou a um amigo ausente, ou, usando a calculadora ou o computador, testem os seus algoritmos inventados num conjunto de exemplos. Os trabalhos de casa poderiam incluir regularmente indicações para reescrever uma fórmula, definição, ou procedimento por palavras próprias ou fazer um esquema de um algoritmo através de um desenho ou fluxograma ou através de um exemplo concreto. Quando os alunos reproduzem uma demonstração, procedimento ou definição, utilizando exactamente as mesmas palavras que o manual, eles deveriam esperar que lhes fosse pedido para o escrever ou explicar de outra maneira. As explicações escritas que um aluno daria a um colega ausente acerca de um conceito ou procedimento constituem uma fonte de dados especialmente válida. Como Miller (1991) fez notar, o acto de escrever também ajuda os alunos a clarificar as suas ideias e, desse modo, a aprender matemática.

Embora a escrita possa ser completada fora da aula, usar o tempo de aula para iniciar essas tarefas escritas permite aos alunos saber que os professores valorizam os resultados. De novo, a questão está em perceber o que os alunos aprenderam e não ficar deslumbrado pelo fluxo de símbolos matemáticos ou o rigor de uma cópia perfeita de um manual. O professor cujos alunos têm bons resultados precisa de estar particularmente atento às suas capacidades de esconder falhas de aprendizagem. Como a maioria dos bons alunos, estes alunos têm normalmente uma excelente capacidade de memorizar, mas o seu desenvolvimento intelectual pode ainda estar num fase de transição (Farrell e Farmer, 1988, pp. 66-68). A sua capacidade para falar de matemática relativamente complexa não significa necessariamente que eles tenham compreendido os conceitos matemáticos representados pelos símbolos. De facto, a sua capacidade para aplicar uma fórmula em exemplos tipo pode induzir o professor em erro, levando-o a supor que entenderam os conceitos necessários para compreenderem a fórmula.

Assim, descobrir o que os alunos aprenderam requer perguntas claras e incisivas, uma atitude receptiva, e métodos de *feedback* que valorizem a compreensão e aplicação em vez da memorização. Isto implica também comunicar aos alunos a importância de obter informação válida sobre a sua aprendizagem.

A aprendizagem face à natureza da matemática

Parece que estamos num círculo vicioso — tanto as respostas correctas como incorrectas podem disfarçar a verdadeira aprendizagem dos alunos! Respostas incorrectas podem representar bons raciocínios, mesmo que baseados em conceitos errados. Respostas correctas, especialmente repetições das palavras do manual ou do professor, podem mascarar falhas de compreensão da matemática subjacente. Porque é que os alunos substituem as suas próprias estratégias pelas ensinadas pelo professor ou recorrem à memorização de regras, fórmulas e definições? Talvez parte da resposta esteja na natureza da matemática. A abstracção da matemática não é compartilhada por nenhuma outra disciplina. Embora os seus modelos possam ser usados para ajudar a explicar o mundo real, nenhuma correspondência biunívoca pode ser estabelecida entre os exemplos da vida real e os modelos matemáticos respectivos. A matemática é também fortemente hierarquizada. Se um aluno tem uma concepção errónea acerca de uma parte desta cadeia lógica, então os bloqueios subsequentes da aprendizagem parecem aumentar de complexidade. Assim, na medida em que a matemática difere de outras disciplinas, também a sua aprendizagem tem uma natureza diferente. Um exemplo óbvio vem-nos à ideia. Embora a matemática tenha uma linguagem especial, não é propriamente uma língua estrangeira. Em matemática, é preciso mais do que traduzir uma expressão para a linguagem corrente. Por vezes, os alunos não percebem esta diferença e contentam-se quando são capazes de debitar fórmulas e definições em resposta às questões do professor. Inversamente, os alunos que inventam falsos algoritmos podem ter dificuldades com o carácter abstracto da matemática. Quando as conexões estabelecidas pelo professor são remotas ou irrelevantes do ponto de vista dos alunos, aqueles que tentam aprender, inventam as suas próprias conexões.

A aprendizagem face ao desenvolvimento cognitivo dos alunos

É importante reconhecer que as conexões podem ter significado para o professor e contudo serem remotas ou irrelevantes do ponto de vista dos alunos. Assim, embora a origem das concepções erróneas dos alunos possa ter, em parte, como causa a natureza única da matemática, estas podem ser, por outro lado, causadas pelo nível do desenvolvimento intelectual dos alunos. O que pode parecer concreto para o professor pode ser visto como abstracto para os alunos. Há mais de cinquenta anos, Brownell (1935) descobriu que os alunos do primeiro ciclo tinham mais dificuldade em operar com números sem unidades (p. ex., 5+7) do que com números concretos (p. ex., 5 maçãs + 7 maçãs). Quando faltavam as unidades, a soma indicada não era vista de uma forma simples mas antes como uma abstracção para ser memorizada. Quando estavam presentes as unidades, os alunos pareciam visualizar a situação concreta e eram capazes de responder correctamente.

Alguns alunos enfrentam um problema análogo quando confrontados com questões acerca de funções divorciadas de uma situação real. Quando estes mesmos alunos investigam uma relação no mundo real (p. ex., entre o tempo e a distância ao solo de sinais atirados de um balão), eles são capazes de estabelecer conexões com significado entre a matemática e a situação real. Os alunos que, aparentemente do nada, inventam ideias erradas podem simplesmente estar a reagir à lacuna existente entre os conceitos matemáticos e o seu significado. A forma como os alunos aprendem depende, pois, tanto da natureza da matemática como do desenvolvimento intelectual dos alunos.

No entanto, responder ao acaso tem um papel na criação de ideias erróneas ou falsos algoritmos pelos alunos. Estes alunos estão motivados para aprender e tentam dar sentido à matemática. Eles também enviam uma mensagem: *"Não vejo qual é a relevância destes procedimentos. Não percebi as conexões que estabeleceu. Dê-me exemplos concretos que tenham sentido para mim"*.

Neste artigo, considerámos somente uma estreita fatia do complexo bolo que é a aprendizagem matemática dos alunos. É contudo, uma fatia que os professores podem estudar e analisar. Também pode ser usada para encorajar a aprendizagem dos alunos. Quando os alunos reflectem na sua própria aprendizagem e discutem as razões que levaram a uma conclusão aparentemente razoável mas inválida, eles aprofundam a sua compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos. Da mesma maneira, os professores, ao estudarem os dados das suas aulas, aprendem mais sobre as aprendizagens dos alunos e mais sobre o ensino. "A importância do conhecimento dos professores sobre o modo como os alunos aprendem matemática não pode ser minimizada" (NCTM, 1991, p. 146).

Referências

Brownell, William A. "Psychological Considerations in the Learning and the Teaching of Arithmetic". In *The Teaching of Arithmetic*, Tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by William Reeve, 1-31. New York: N.C.T.M. and Teachers College Press, Columbia University, 1935.

Davis, Robert B. *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Norwood, N. J.: Ablex Publishing Co., 1984.

Farrell, Margaret A., and Walter A. Farmer. *Secondary Mathematics Instruction: An Integrated Approach*. Providence, R.I.: Janson Publications, 1988.

Miller, L. Diane. "Writing to learn Mathematics." *Mathematics Teacher* 84 (October 1991): 516-21.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: The Council, 1991.

Tradução de João Almiro e Margarida Abreu, E. S. de Tondela
Revisão de A. P. Canavarro e S. Carreira