

Velocidade recomendada nas auto-estradas: 20 Km/h (?)

João Filipe Matos e Susana Carreira

Como reagiria se à entrada da auto-estrada lhe surgisse um aviso dizendo: "velocidade recomendada em caso de trânsito congestionado: 20 km/h"? À luz de dados do Código da Estrada, é explorado, neste artigo, o problema da definição de velocidade limite e de velocidade recomendada, procurando salientar-se a eventual contradição entre o interesse individual e o interesse colectivo dos automobilistas.

Agora que o código da estrada está a ser revisto, tem sido discutido o problema das velocidades admissíveis nas auto-estradas. Claro que esta discussão tem ênfase nesta altura porque o número de quilómetros de auto-estrada em Portugal aumentou e, além disso, é hoje muito maior o número de automobilistas a usá-las. Mas é o problema da definição da velocidade recomendada na auto-estrada que se reveste de aspectos mais interessantes. Desde a sua formulação, até ao momento em que é oportuno fazer recomendações, esta situação levanta questões que merecem uma análise mais atenta do que aquela que surge geralmente nos meios de comunicação.

Como se sabe, duas das características importantes de uma auto-estrada são: (1) não ter cruzamentos de nível e (2) não se poder estacionar ou mesmo parar na via de rodagem. Uma auto-estrada é, por definição, um meio para circular. É por isso que é tão relevante a definição da velocidade a adoptar no tráfego em auto-estrada. Naturalmente, quem usa uma auto-estrada deseja chegar depressa e em segurança ao seu destino; pretende mesmo uma maior rapidez e uma maior segurança do que numa simples estrada nacional. E é neste ponto que começa a emergir o interesse do problema, pois se é verdade que cada automobilista quer chegar depressa, também é válido que todos os automobilistas o queiram (Um mero jogo de terminologia lógica?...).

Parecem ser relativamente imediatos alguns dos critérios a utilizar na definição da velocidade na auto-estrada: (a) Economia, (b) Segurança e (c) Rapidez na deslocação.

A Economia

Os critérios de ordem económica es-

tiveram muito presentes nas medidas de limitação da velocidade no início dos anos 70, no momento da "grande crise petrolífera". Mas, progressivamente, deixaram de constituir uma preocupação fundamental, por duas ordens de razões: primeiro, porque a tecnologia automóvel evoluiu e hoje não é tão linear como isso que um automóvel gaste mais combustível a 100 km/h do que a 60 ou a 70 km/h; depois, porque se concluiu que a limitação de consumo de petróleo pode mesmo constituir um factor perturbador do complexo sistema económico que rege o mundo da energia. Resta acrescentar que os argumentos de ordem ecológica (que nunca foram muito esgrimidos) estão igualmente ultrapassados pelas características dos motores e dos sistemas de limitação de emissões de gases.

A Segurança

Fica, pois, como grande critério na definição da velocidade, a questão da segurança. Actualmente o Código da Estrada impõe que os automobilistas mantenham uma distância de segurança em relação ao veículo que os precede, de modo que consigam imobilizar o seu automóvel sem perigo de colisão.

Parece necessário considerar que a distância de segurança (Ds) inclua as duas componentes seguintes: (i) a distância de reacção (Dr), que será a distância percorrida entre o instante em que o condutor decide travar e o instante em que acciona efectivamente o pedal do travão; (ii) a distância de travagem (Dt), isto é, a distância percorrida pelo veículo durante a travagem, desde a velocidade V (com que se desloca) até à velocidade 0 (imobilização). Será portanto:

$$Ds = Dr + Dt$$

Curiosamente, o código da estrada apenas considera a distância de travagem (Dt) e sobre a sua medida é muito explícito. A distância de travagem é calculada pela fórmula:

$$Dt = \frac{V^2}{100}$$

sendo V a velocidade do veículo em km/h e Dt a distância de travagem em metros.

Assim, por exemplo, para um automóvel que se desloque a uma velocidade de 60 km/h, a distância de travagem será Dt=36 m. Não existe no código da estrada qualquer alusão às razões que justificam esta fórmula. No entanto, ela é utilizada nos manuais que ensinam o Código (por exemplo, Reis, 1981) para calcular a distância de segurança e concluir que a velocidade máxima de condução durante a noite, quando se circula em médios (cujo alcance máximo é de 30 metros), deveria ser de 40 km/h. Estes manuais incluem, em geral, algumas considerações acerca da distância de reacção. O manual citado considera que a distância de reacção, em metros, deve ser calculada pela expressão:

$$Dr = \frac{8V}{30}$$

em que V é a velocidade do veículo.

A Distância de Reacção

A fórmula $Dr = \frac{8V}{30}$ pode ser analisada no sentido de perceber o que levaram os autores dos manuais à sua adopção. Começamos por notar que nesta fórmula está implícito um determinado tempo de reacção, que pode ser determinado, se nos recordarmos que, em situação de movimento rectilíneo uniforme, se tem:

$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}.$$

Na fórmula para o cálculo da distância de reacção, Dr é a distância em metros e V é a velocidade em km/h. Ora, convertendo a velocidade V para m/s, obtém-se o resultado $5V/18$ m/s. Assim, designando por tr o tempo de reacção, teremos o sistema de equações:

$$\begin{cases} Dr = \frac{8V}{30} \\ Dr = \frac{5V}{18} \times tr \end{cases}$$

Determinando o valor de tr, obtém-se $tr=0,96$ segundos. Sejam condescendentes neste ponto e admitamos que um condutor "normal" tenha um tempo máximo de reacção de cerca de 1 segundo.

A Distância de Travagem

Como já foi afirmado, não há nenhuma razão que suporte a fórmula indicada para o cálculo da distância de travagem. A sua simplicidade, contudo, sugere uma certa comodidade de cálculo. Tentando analisar esta fórmula, poderemos começar por arriscar alguns pressupostos. Suponhamos, por exemplo, que o veículo tem um movimento rectilíneo uniformemente retardado (isto é, que a aceleração é constante) durante a travagem. Nestas condições, sabe-se que a velocidade, v, e o espaço percorrido, s, têm leis bem determinadas:

$$v(t) = v_0 - at$$

e

$$s(t) = v_0t - \frac{1}{2}at^2$$

Na situação de travagem, admitimos que o veículo tem inicialmente uma velocidade $v_0=5V/18$ m/s e que pára ao fim de um certo tempo, isto é, que no final da travagem a velocidade será 0 m/s.

Da primeira equação sai:

$$0 = \frac{5V}{18} - at \Leftrightarrow t = \frac{5V}{18a}$$

Substituindo na equação dos espaços, chega-se ao resultado seguinte para a distância de travagem (em metros):

$$Dt = \frac{25V^2}{648a}$$

Portanto, aparentemente, o facto de a distância de travagem ser directamente proporcional ao quadrado da velocidade parece estar de acordo com a fórmula do Código da Estrada. Resta saber se a constante de proporcionalidade é aceitável. Comparando este resultado com a fórmula

$Dt = \frac{V^2}{100}$, diremos que a aceleração aplicada na travagem é da ordem dos $3,9 \text{ m/s}^2$. O que poderá isto significar em termos de velocímetro? Podemos investigar qual seria a redução que teria a velocidade em cada segundo de travagem.

Na verdade, a aceleração dá-nos exactamente o valor da taxa de variação da velocidade. Quer dizer, em cada segundo, a velocidade sofre uma redução de $3,9 \text{ m/s}$. Já que os velocímetros dos automóveis indicam a velocidade em km/h, diremos que, em cada segundo de travagem, a velocidade tem um decréscimo de 14 km/h . Mas se este indicador não for suficientemente elucidativo podemos ainda construir uma tabela que mostre as distâncias de segurança, calculadas segundo o Código, para diferentes valores da velocidade. O que dizer da razoabilidade dos resultados?

VEL. (km/h)	DIST. SEG. (metros)
0	0,00
10	3,67
20	9,33
30	17,00
40	26,67
50	38,33
60	52,00
70	67,67
80	85,33
90	105,00
100	126,67
110	150,33
120	176,00
130	203,67
140	233,33
150	265,00

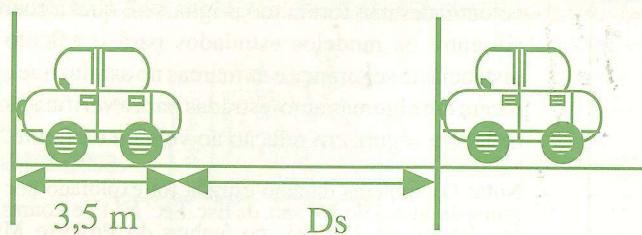
O Fluxo de Trânsito

Passemos agora a uma questão essencial que é a fluidez do trânsito na auto-estrada. Se se admitir que a velocidade dos automóveis na auto-estrada é constante e igual a V km/h, que cada veículo tem um comprimento médio de 3,5 metros, e que todos os automóveis respeitam uma certa distância de segurança Ds, a contagem do número de automóveis que passa num dado ponto da auto-estrada por unidade de tempo (por exemplo, por hora) pode ser feita, tendo por base o esquema da figura.

Supomos que o 1º veículo contado andou uma distância de V km ($1000 \times V$ metros) ao fim de 1 hora, pelo que o número de automóveis que passaram pelo mesmo ponto durante essa hora será:

$$F = \frac{1000 \times V}{Ds + 3,5} = \frac{1000 \times V}{Dr + Dt + 3,5}$$

De acordo com as fórmulas do Cód-



go da Estrada para o cálculo de D_s , a expressão obtida para o fluxo é a seguinte:

$$F = \frac{1000 \times V}{\frac{8V}{30} + \frac{V^2}{100} + 3,5} = \frac{3 \times 10^5 \times V}{3V^2 + 80V + 1050}$$

E, querendo o valor máximo do fluxo, calculamos a derivada, e encontramos:

$$F' = 0 \Leftrightarrow V = \pm 18,7$$

O sinal da derivada permite-nos concluir que o fluxo F toma o valor máximo para $V=18,7$. Isto significa que, segundo o Código, o fluxo de trânsito será máximo quando a velocidade de circulação for cerca de 20 km/h, o que é inclusivamente proibido na auto-estrada, onde a velocidade mínima é de 40 km/h. Note-se ainda que a distância de segurança correspondente ao fluxo máximo de trânsito é de 8,5 m.

É claro que esta conclusão é surpreendente, tanto mais que levaria a recomendações como a da colocação de avisos, em certos locais estratégicos, dizendo qualquer coisa como:

**EM CASO DE TRÁFEGO
CONGESTIONADO**

**VELOCIDADE
RECOMENDADA
20 km/h**

Talvez fosse uma forma de todos chegarem mais cedo ao seu destino!

Extensões e Folha de Cálculo

Existem ainda outras explorações possíveis em torno deste problema. Por exemplo, poder-se-á aprofundar a discussão acerca da fiabilidade da fórmula usada para o cálculo da distância de travagem (e o mesmo, naturalmente, para

a fórmula da distância de reacção). Decerto, há vários factores que podem influenciar a distância percorrida durante a travagem. Basta pensar-se no esta-

do dos travões, na aderência dos pneus, no piso mais ou menos escorregadio... Talvez seja de admitir que a fórmula apresentada no Código da Estrada seja excessivamente cautelosa, no sentido de prevenir o acidente, e como tal, que a distância de segurança esteja a ser determinada com uma "grande folga"... Nesse caso, interessará investigar o que aconteceria se a distância de travagem fosse menor. Para o efeito, poderemos introduzir um parâmetro k na fórmula da distância de segurança, tal que $0 < k < 1$, e considerar:

$$D_s = D_r + kDt,$$

isto é:

$$D_s = \frac{8V}{30} + k \frac{V^2}{100}$$

Nesse caso, o fluxo de tráfego será dado por:

$$F = \frac{1000V}{\frac{8V}{30} + k \frac{V^2}{100} + 3,5}$$

Derivando a função F em ordem a V e determinando os zeros, chegamos à conclusão que o fluxo será máximo para

$$\text{uma velocidade } V = \sqrt{\frac{350}{k}}$$

Nesta altura haverá vantagens em utilizar uma folha de cálculo para analisar os efeitos do parâmetro k no fluxo de trânsito e para encontrar os respectivos valores da velocidade e da distância de segurança. A construção de gráficos será um processo elucidativo do efeito deste parâmetro k .

Apresentam-se na página seguinte os gráficos do fluxo em função da velocidade para as situações que correspondem aos valores $k=0$, $k=1$ e $k=0,2$.

O primeiro gráfico (pág. seguinte) representa o caso em que se despreza a distância de travagem. É como se a paragem do veículo fosse instantânea ao car-

regar--se no travão. É naturalmente uma hipótese futurista, mas que revela um incrível potencial na melhoria dos problemas de congestionamento de tráfego! Será interessante notar que, mesmo nesta situação ideal, o fluxo de trânsito estaria condicionado a um limite máximo.

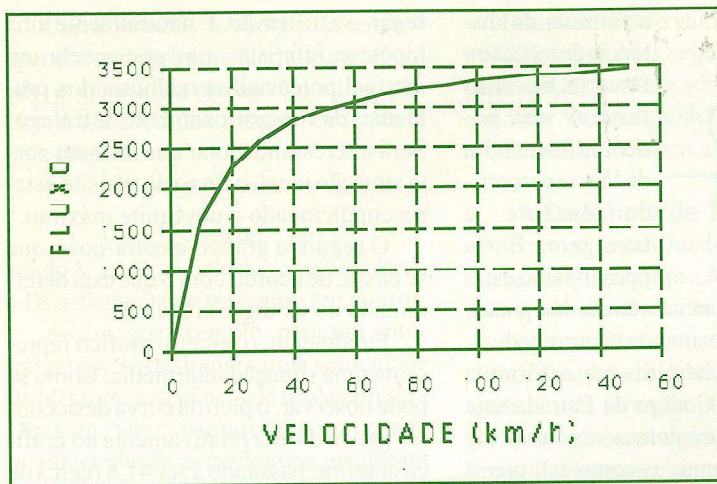
O segundo gráfico mostra-nos o que se passa, de acordo com o que está determinado no Código da Estrada.

Finalmente, o terceiro gráfico representa uma situação intermédia. Como se pode observar, o pico da curva deslocou-se para a direita relativamente ao gráfico anterior, passando a ser 41,8 (cerca de 40 km/h) a velocidade recomendada. Naturalmente que a distância de segurança também se alterou relativamente ao que é previsto no Código da Estrada. A construção de uma pequena tabela com as velocidades recomendadas (para que o fluxo seja máximo) e correspondentes distâncias de segurança, para diversos valores de k , poderá ajudar a avaliar o efeito deste parâmetro.

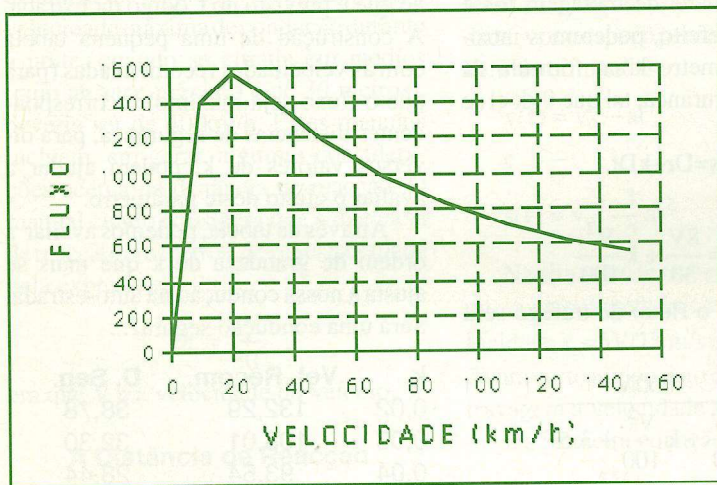
Através da tabela, podemos avaliar a ordem de grandeza de k que mais se ajusta à nossa condução na auto-estrada. Será uma condução segura?...

k	Vel. Recom.	D. Seg.
0,02	132,29	38,78
0,03	108,01	32,30
0,04	93,54	28,44
0,05	83,67	25,81
0,06	76,38	23,87
0,08	66,14	21,14
0,1	59,16	19,28
0,2	41,83	14,66
0,3	34,16	12,61
0,4	29,58	11,39
0,5	26,46	10,56
0,6	24,15	9,94
0,7	22,36	9,46
0,8	20,92	9,08
0,9	19,72	8,76
1	18,71	8,49

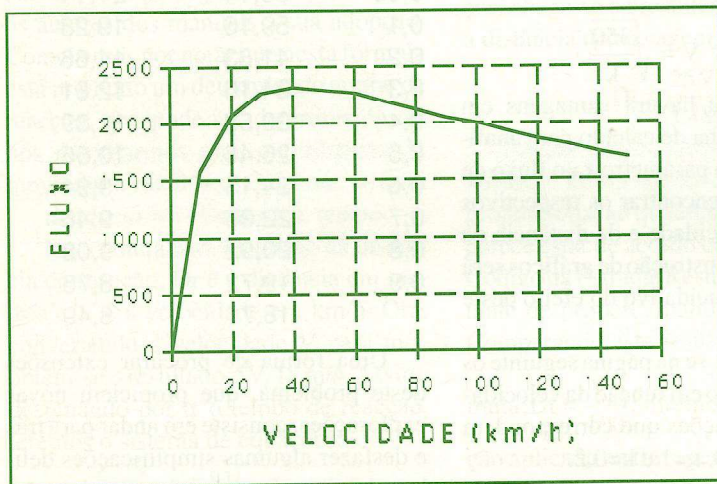
Uma forma de procurar extensões deste problema, que propiciem novas explorações, consiste em andar para trás e desfazer algumas simplificações deliberadamente introduzidas na situação. Por exemplo, o que dizer se as distâncias entre os automóveis não forem iguais e variarem entre certos valores? E se as



Gráf. 1. - A variação do fluxo com a velocidade, para $k=0$



Gráf. 2. - A variação do fluxo com a velocidade, para $k=1$



Gráf. 3. - A variação do fluxo com a velocidade, para $k=0,2$

velocidades não forem todas iguais? E qual a coerência entre os modelos estudados para o cálculo da distância de segurança e as marcas no asfalto que aparecem em algumas auto-estradas para a verificação da distância segura em relação ao veículo da frente?

Nota: O problema da auto-estrada foi explorado por um grupo de alunos do 10º ano, da Esc. Sec. Nº 1 de Loures, no ano lectivo de 1992/93, no âmbito do Projecto MEM (Modelação no Ensino da Matemática). A versão aqui apresentada teve como fonte de inspiração o artigo "Maximising Traffic Flow Through Tunnels", do livro *Applying Mathematics*, de Burghes, Huntley e McDonald.

Referências

- Burghes, D., Huntley, I. e McDonald, J. (1982). *Applying Mathematics*. Chichester: Ellis Horwood.
 Reis, J. (1981). *Resumo Ilustrado do Código da Estrada com Toda a Matéria para os Testes e Ensina a Conduzir*. Edição do Autor.

João Filipe Matos
 Fac. de Ciências da Univ. de Lisboa
 Susana Carreira
 F.C.T. da Univ. Nova de Lisboa

O concurso de problemas do Profmat (continuação da página 19)

- 2º Faz-se a primeira travessia.
- 3º Na outra margem, com a ajuda do aparelho, identificam-se todos os pares de fios ligados entre si. Numeram-se estes fios dois a dois: 1-2, 3-4, 5-6, ..., 97-98. Aos dois fios soltos atribuem-se os números 99 e 100. Com isto fica-se a saber, por exemplo, que na primeira margem os fios 1 e 2 estão ligados entre si, embora não se saiba a que par eles correspondem exactamente.
- 4º Ainda sem mudar de margem, liga-se o fio 99 com o 1, o 2 com o 3, o 4 com o 5, ..., o 96 com o 97, e deixa-se o 98 solto. O 100 também continua solto.
- 5º Faz-se a segunda travessia.
- 6º De novo na margem inicial desfazem-se todas as ligações, tendo no entanto o cuidado de manter os fios agrupados dois a dois. Pega-se num dos dois fios que estavam soltos e, com o aparelho, procura-se um fio que, do outro lado, possa estar ligado a ele. Se não houver nenhum fio que feche o circuito é porque se começou com o fio 100. Se se descobrir um é porque se começou com o 99.
- 7º O fio que fecha o circuito com o 99 é o número 1. Conclui-se também que aquele que, do lado de cá, estava emparelhado com o 1 é o 2. Procura-se depois o novo par do 2, que é o número 3. O fio que estava ligado ao 3 é o 4, que fica solto. Com o 4 procura-se o 5, e assim sucessivamente até que, com o 96, se identifica o 97. O fio que sobra é o 98.

José Paulo Viana
 E. S. Vergílio Ferreira (Carnide)