O problema do trimestre

Sobre o problema anterior

O problema proposto para este trimestre foi "O prémio da vitória":

No final da batalha de Hastings, o rei Guilherme da Normandia, satisfeito com a vitória sobre os saxões, quis premiar os cavaleiros e capitães que mais se tinham distinguido no combate.

- Quantos são eles? - perguntou ao comandante do exército.

- No total são 19.

- Aqui tens 1000 ducados de ouro para lhes dares. Vê lá como se há-de distribuí-los.

O comandante retirou-se. Passado algum tempo voltou com uma proposta em que cada cavaleiro receberia mais 30 ducados que cada capitão.

- Apesar de os cavaleiros terem de receber mais que os capitães, parece-me injusta uma tão grande diferença - disse o rei. - Arranja outra maneira de distribuir os mil ducados.

Uma hora depois, o comandante tinha nova proposta:

- Os cavaleiros já não recebem tanto e cada capitão recebe mais 8 ducados que na proposta anterior - explicou. - E distribuem-se também todas as moedas!

- Estou de acordo - disse o rei.

Qual foi o prémio de cada cavaleiro e de cada capitão?

Nem 24 horas se tinham passado desde que a revista tinha sido distribuída aos participantes do ProfMat dos Açores quando recebemos a resposta da Luisa Andrade, de Angra do Heroísmo. A mais rápida de sempre! Um belo começo.

Entretanto chegaram-nos as resoluções de Helena Rocha (Lisboa), Cristina Veiga (Torres Vedras), A. Silva Abrantes (Seia), Orlando Freitas (Funchal) e Paulo Lopes (Covilhã). Talvez porque o intervalo entre a saída do número anterior da revista e a publicação deste é mais curto que o normal, não apareceram as respostas de alguns entusiastas habituais.

Embora Silva Abrantes tenha acrescentado uma segunda resolução com recurso à folha de cálculo Excel, todos seguiram a via algébrica para resolver o problema. Apresentamos a estratégia seguida por este nosso colega:

Se o número de cavaleiros for Cv, cada um recebendo X ducados, e o número de capitães for Cp, cada um a receber X-30, obtemos as equações correspondentes à primeira distribuição

$Cv + Cp = 19$

$Cv.X + Cp(X-30) = 1000$

Eliminando Cv e resolvendo em ordem a Cp temos

$$C_p = \frac{19X - 1000}{30}$$

Como Cp é menor que 19, X tem de ser menor que 83.

Como Cp é um número natural, 19X-1000 tem de ser:

- positivo e portanto X>52,
- múltiplo de 30 e portanto X tem de terminar em 0.

Calculando Cp para X igual a 60, a 70 e a 80, só no segundo caso Cp é inteiro. Logo X=70 e Cp=11.

Então, pela primeira distribuição, os 11 capitães receberiam 40 ducados cada um (num total de 440), e os 8 cavaleiros teriam direito a 70 cada um (num total de 560 ducados).

Portanto, na distribuição final cada capitão recebeu 48 ducados e cada cavaleiro 59.

"Um mínimo no triângulo"

No número anterior da revista propunha-se que se generalizasse o problema do 2º trimestre a um triângulo qualquer.

A resposta, como Alberto Canelas e Armando Mota mostram, é surpreendente. Tal como no triângulo rectângulo, a distância mínima continua a ser quando o ponto P é o pé da altura relativa ao lado AB.

José Paulo Viana
Esc. Sec. Vergílio Ferreira (Carnide)

Problema proposto

QUATRO CASTELOS, UMA ESTRADA

Na grande planície da Sildávia há quatro belos e antigos castelos que atraem a atenção de todos os visitantes.

O Ministério de Turismo resolveu construir uma estrada panorâmica. Contrataram a melhor empresa de engenharia civil do país e pediram que a estrada fosse uma circunferência que passasse a igual distância dos quatro castelos.

Olhando para o mapa, os engenheiros verificaram que os castelos ocupavam os vértices de um quadrilátero irregular.

O problema é sempre possível?
Quantas soluções há no caso geral?